جورج ب. توماس

حد و پیوستگی

ترجمهٔ:

غلامرضا برادران خسروشاهی

محمد رجبی طرخورانی

حد و پیوستگی

تألیف

جورج ب. توماس

ترجمهٔ

غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی

۱۳۶۸

George B. Thomas, Jr., *Limits*, 1963; *Continuity*, 1965, Addison-Wesley, Publishing Company, Inc.

حد و پیوستگی
تألیف جورج ب. توماس
ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی
مسؤول فنی: نادر کثیری

تعداد ۵۰۰۰
چاپ اول ۱۳۶۸
حروفچینی: عبدی
ناشر : نشر علوم پایه

مرکز پخش : نشر علوم دانشگاهی
تهران، خیابان انقلاب، خیابان شهید وحید نظری، بین فروردین و اردیبهشت،
پلاک ۲۷۰، طبقهٔ همکف. **تلفن ۶۶۵۴۳۲**

فهرست

عنوان	صفحه

بخش اول: حد

پیشگفتار

این قسمت به منظور پیش‌درآمدی به "حساب دیفرانسیل وانتگرال"، یا متمم آن ویا متممی به‌درس مقدماتی توابع، نگاشته شده است.

به‌کاربردن مفهوم حد درتوسعهٔ حساب دیفرانسیل وحساب انتگرال ازمفاهیم اساسی است. دو مسألهٔ نمونه در حساب دیفرانسیل، یافتن شیب مماس برمنحنی، وبه‌دست آوردن سرعت لحظه‌ای یك جسم متحرك است. لكن قبل‌از به‌دست‌آوردن شیب خط مماس برمنحنی، باید منظور خود را از "مماس برمنحنی" دقیقاً بیان‌كنیم. در مورد دایره به‌طور ساده،كافی است بگوییم كــه خط مماس و دایره دقیقاً دارای یك نقطهٔ مشترك می‌باشند. اما، در حالت كلی، این نه یك شرط كافی و نه یك شرط لازم برای مماس بودن برمنحنی است. به‌عنوان مثال، خط $y=-x$ و منحنی $y=x^3$ یكدیگر را در یك نقطه، مبــدأ مختصات، قطــع می‌كنند. لكن خط مزبور بــا چنان شیبی منحنی را قطع می‌كند كه هیچ كس آن را خط مماس برمنحنی نمی‌نامــد. (والا می‌توان خطوط دیگری را به‌عنوان مماس مجاز دانست: $y=-2x$ و $y=-8x$ و بی‌نهایت خط‌دیگر.) ازطرف‌دیگر، خط $y=3x-2$ ومنحنی $y=x^3$ دارای دو نقطــهٔ مشترك $(1, 1)$ و$(-2, -8)$ هستند، ویك ترسیم دقیق (بعلاوهٔ تشخیص اینكه $x=1$ یك ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^3=3x-2$ است.) نشان می‌دهد‌كه این خط را می‌توان به عنوان مماس در نقطهٔ $(1, 1)$ به منحنی مزبور پذیرفت. این‌نمونهٔ خط مماسی است‌كه با یك منحنی‌دارای بیش از دونقطهٔ مشترك است. تعریفی‌كه درحال حاضر دربارهٔ "خط مماس" پذیرفته شده به‌صورت زیر است:

> منحنی C و نقطهٔ P روی‌آن مفروضند. نقطهٔ دیگری مانند Q روی‌آن درنظر بگیرید وفرض‌كنید L_Q خطی از P به Q است. نقطهٔ P را ثابت فرض كرده و Q را، روی منحنی، به‌طرف P به‌حركت درآورید. اگر یك خط ثابت L وجود داشته باشد‌كه از P عبوركند به‌طوری‌كه زاویهٔ بین L_Q و L، هنگامی كه Q روی C به طرف P

سوق داده شود، به‌صفر نزدیك شود، در آن صورت L در نقطهٔ P مماس برمنحنی C نامیده می‌شود.

به‌عبارت دیگر، مماس یك وضعیت حدی برای یك خط قاطع از P به Q است هرگاه Q به P میل کند. همهٔ اینها با معرفی مفهوم ریاضی حد دقیق‌تر بیان می‌شوند.

تعریف سرعت لحظه‌ای نیز نیازمند حـد است: حد سرعت متوسط که با فاصله‌های زمانی هرچه کوتاهتر محاسبه می‌شوند.

مسائل نمونهٔ حساب انتگرال عبارتند از: به‌دست آوردن مساحت سطحی که با یك یا چند منحنی وخطهای راست محدود است؛ به‌دست آوردن طول منحنیها؛ به‌دست‌آوردن کار انجام شده توسط یك نیروی متغیر؛ به‌دست آوردن مسافتی که به‌وسیلهٔ یك جسم متحرك بایك متغیر معلوم پیموده می‌شود. یکباردیگر نیاز به‌مفهوم حدحتی برای روشن شدن اینکه منظور از مساحت، حجم، یا طول یك‌کمان، یاکار، یا مسافت پیموده شده چیست، مشاهده می‌شود. این تعاریف در کتب درسی معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال عرضه شده، و متعاقباً نیز فرمولهایی برای به‌دست آوردن کمیتهای مورد سؤال ارائـه می‌شود. هدف ما در اینجا نه ارائهٔ این تعاریف ونه ارائهٔ طریقی برای حل این‌گونه مسائل‌است. (باوجود این، مثالهایی درانتهای این‌کتاب ارائه خواهیم‌کرد.) بلکه دراینجا منظورمان را از اینکه حد چیست عرضه می‌داریم، و آن را با مثالهای متنوعی روشن می‌سازیم.[1]

درجبر نیزبا حد مواجه می‌شویم. برای مثال دنباله‌ای را درنظر بگیریدکه $\sqrt{۲}$ را تقریب می‌زند

$$۱,\ ۱٫۴,\ ۱٫۴۱,\ ۱٫۴۱۴,\ ۱٫۴۱۴۲,\ ۱٫۴۱۴۲۱,\ \ldots$$

کـه در آن سـه نقطـه، به‌معنـای "الـی‌آخـر" مـی‌باشـد. اگـر ایـن تقریبهـا را $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, \ldots$ بنامیم، آنگاه تقریب nام، یعنی a_n، درصورتی‌که n خیلی بزرگ باشد، به $\sqrt{۲}$ نزدیك خواهد بود، زیرا اختلاف بین $\sqrt{۲}$ و a_n کمتراز $۱/(۱۰)^{n-۱}$ است. اگر دنبالـهٔ دیگری از تقریبهای یك عدد دیگر، مثلاً دنبالهٔ $b_۱, b_۲, b_۳, \ldots$ را داشته باشیم‌که تفاضل b_n و $\sqrt{۳}$ از $۱/(۱۰)^{n-۱}$ کوچکتر است، در آن صورت طبیعتـاً، می‌توان فرض‌کردکه تقریبهای $a_۱+b_۱, a_۲+b_۲, \ldots$ به $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ میـل می‌کند. و مشابهاً در مورد تفاضل، حاصل‌ضرب، وخارج‌قسمت نیز چنین است. طبیعی است‌که چنین ملاحظاتی ما را به‌بررسی حد حاصل‌جمع، تفاضل، حاصل‌ضرب، و خارج قسمت رهنمون می‌سازد. یك مطالعهٔ دقیق از اثباتهای مربـوط بـه این قضایـا، یك تحلیل خطا برای

---

۱. برای یك بحث تاریخی دربارهٔ‌گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال و معرفی مفهوم حد به‌کتاب

Boyer Carl B., *The History of Calculus and its Conceptual Development*, Dover (1959)

مخصوصاً به‌فصل VI، "دورهٔ بی‌تصمیمی" و فصل VII، "فرمول‌بندی دقیق" مراجعه کنید.

تقریبهای گوناگون، فراهم می‌سازد که خود مبحث مهمی درکاربردکامپیوترهای سریع عددی است.

بعضی از مطالب مهم دربارهٔ حدها دراینجا نیامده است. دو مطلب مهم از این‌نوع مطالب، ضابطهٔ کشی درهمگرایی، و همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع، است. خوانندهٔ علاقه‌مند، می‌تواند این مطالب و مطالب اضافی را درکتابهای پیشرفته‌تری که در مراجع آمده‌است، بیابد. این‌چنین مطالبی معمولاً درکتابهای پیشرفتهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال یافت می‌شود و صحیح‌تر آن است که مطالعهٔ آنها تا زمانی‌که خواننده به‌یك بلوغ ریاضی بیشتری دست نیافته است، بــه تأخیر افتد. یکی از مقاصد این قسمت کمك به دانشجویان علاقمند و جدی در راه گسترش آن بلوغ ریاضی است.

۱. مقدمه

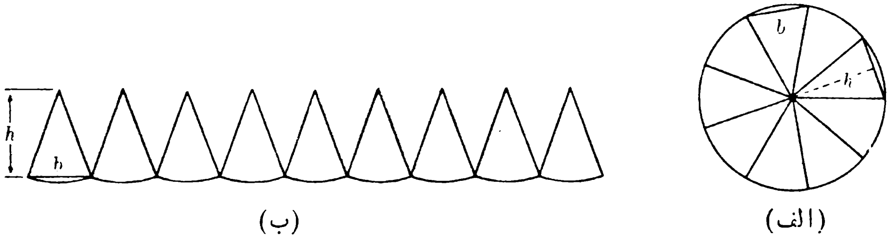
مفهوم حد در ریاضیات، در اوایل، از محاسبهٔ سطح داخل یك دایــره پدیدار شد. فرض کنید سطح محصور به دایره‌ای به n قطعهٔ همشکل با مساحتهای مساوی که در آن n عدد بزرگی است، همچنان‌که در شکل ۱ الف آمده است، تقسیم شود، و به‌صورت دندانه‌های اره، مانند شکل ۱ ب، گسترده شود. مساحت سطح محصور به دایره با مجموع مساحتهای سطوح این‌قطعات مساوی‌است. هرقطعه تقریباً یك مثلث با ارتفاع h و قاعدهٔ b است. اگر تعداد قطعات n باشد، سطح کل تقریباً با $n\times(۱/۲)bh$ برابر خواهد بود. برای نشان دادن وابستگی این مساحت به n، آن را با A_n نمایش می‌دهیم، پس

$$A_n = n\times\frac{۱}{۲}\,bh = \frac{h}{۲}\,(nb) \qquad (۱.۱)$$

در قسمت سمت راست (۱.۱)، nb محیط n ضلعی منظم محاط در دایره است، و به طور شهودی احساس می‌کنیم که اگر n خیلی بزرگ فرض شود، آنگاه محیط این چند ضلعی محاطی تقریباً برابرمحیط دایره خواهد بود

$$nb \approx C$$

و ارتفاع h باید تقریباً با شعاع دایره، r، برابر باشد. بنا براین، $A_n=(h/۲)(nb)$، تقریباً



شکل ۱

مساوی $C(r/۲)$ است. یك دلیل معرفی مفهوم حد، دقیق‌کردن معنای عبارت "تقریباً برابر است با . . ." و جایگزین کردن عباراتی نظیر

$$nb \approx C, \quad h \approx r$$

با

$$\lim_{n \to \infty} h = r, \quad \lim_{n \to \infty} (nb) = C$$

و

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{h}{۲}(nb) = \frac{r}{۲} C$$

است. قوانین جبر می‌گویند که اگر $a = b$ و $c = d$، آنگاه $ac = bd$ و $a + c = b + d$. اگر به نحوی عبارت "تقریباً برابر است با" با یك "حد" جایگزین شود می‌توان امیدوار بود که قوانین مشابهی نیز دربارهٔ حد بـه کار رود. به عبارت دیگر، فرض کنید موقتاً موافقت کنیم که نماد $\approx$ با "تقریباً برابر است با" مترادف باشد. در آن صورت، اگر $a \approx b$ و $c \approx d$، می‌توان امیدوار بود که داشته باشیم $ac \approx bd$ و $a + c \approx b + d$. بنابراین در مطالعهٔ حد یکی از اهداف آن است کـه ببینیم تحت چه شرایطی حد حاصلضرب (یا مجموع) با حاصلضرب (یا مجموع) حدها برابر است.

درمثال دایره، اگر $\lim_{n \to \infty} h = r$ و

$$\lim_{n \to \infty} (nb) = C$$

باشد آیا راست است که

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h}{۲} = \frac{r}{۲}$$

و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h}{۲}(nb) = \left[\lim_{n \to \infty} \frac{h}{۲}\right] \cdot \left[\lim_{n \to \infty} (nb)\right]$$

با پیش بینی کارهای آینده، به این سؤال جواب "مثبت" می‌دهیم و با فرض اینکه $C = ۲\pi r$ فرمول شناخته شده‌ای برای محیط یك دایره است، برای مساحت سطح محصور به‌دایره، نتیجهٔ

$$A = \frac{r}{۲} \cdot ۲\pi r = \pi r^۲$$

به‌دست می‌آید.

به عنوان دومین مثال برای حد، مسألهٔ جمع یك سری هندسی را در نظر می گیریم

$$a+ar+ar^{2}+\dots+ar^{n}+\dots \qquad (۲.۱)$$

در اینجا a جملهٔ اول و r مضرب مشترکی است که ما را از جمله‌ای به جملهٔ دیگر منتقل می‌کند. فرض‌کنید مجموع $n+1$ جملهٔ اول را با S_n نمایش دهیم

$$S_n=a+ar+ar^{2}+\dots+ar^{n} \qquad (۳.۱)$$

دراین صورت

$$rS_n=ar+ar^{2}+ar^{3}+\dots+ar^{n+1}$$

بنابراین

$$S_n-rS_n=a-ar^{n+1}=a(1-r^{n+1})$$

یا

$$(1-r)S_n=a(1-r^{n+1}) \qquad (۴.۱)$$

اگر $r=1$ باشد، معادلهٔ (۴.۱) به‌صورت $0=0$ در می‌آید که معادلهٔ درستی است ولی کمکی نمی‌کند. با وجود این، در این حالت معادلهٔ (۳.۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$S_n=(n+1)a \quad \text{اگر} \quad r=1 \qquad (\text{۵.۱ الف})$$

اگر $r\neq 1$، آنگاه طرفین معادلهٔ (۴.۱) را بر $1-r$ تقسیم کرده و به‌دست می‌آوریم

$$S_n=a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad (\text{۵.۱ ب})$$

مثال. مجموع $n+1$ جملهٔ اول سری زیر را به‌دست آورید

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\dots \qquad (۶.۱)$$

حل: فرض‌کنید $a=3/10$، $r=1/10$ ومعادلهٔ (۵.۱ ب) را به‌کار گیرید تا

$$S_n=\frac{3}{10}\,\frac{1-(0.1)^{n+1}}{1-0.1}=\frac{3}{9}[1-(0.1)^{n+1}]$$

به‌دست آید. از آنجا که عدد $(0.1)^{n+1}$ به‌ازای nهای خیلی بزرگ تقریباً برابر صفر است، لذا نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{9}[1-0]=\frac{1}{3}$$

حال آماده‌ایم که نتیجهٔ بالا را بپذیریم زیرا با بسط اعشاری متناوب

$$\frac{۱}{۳}=۰٫۳۳۳۳\ldots=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰}+\ldots$$

هماهنگی دارد.

تمرینها

حدسهای معقولی ازحدهای زیر به‌دست دهید.

۱. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(۲+\frac{۱}{n}\right)$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{n}$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲+n}{n^{۲}}$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲^{n}}\right)$

۲. تعریف حد یك دنباله

در بخش قبلی، ایدهٔ "حد" را به‌منزلهٔ مفهوم مترادفی با "تقریباً برابراست‌با" معرفی کردیم، یعنی اگر وقتی n خیلی بزرگ است S_n تقریباً برابر L باشد، می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty}S_n=L$$

حال می‌خواهیم تعریف دقیقتری عرضه‌کنیم. برای این‌کار به‌یك "اندازه" احتیاج داریم‌که اختلاف بین S_n و L را که بایستی تقریباً برابر صفر باشد، نشان دهد. از آنجا که S_n ممکن است بزرگتر یا کوچکتراز L باشد، لذا مقدار نزدیکی آنها را با قدرمطلق تفاضل آنها اندازه می‌گیریم

$$|S_n-L| \tag{۱.۲}$$

درمثال سری هندسی، داشتیم

$$S_n=\frac{۳}{۹}\left[۱-\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{n+۱}\right]$$

و حدس زدیم‌که باید حدش مساوی

$$L=\frac{۳}{۹}$$

باشد. قدرمطلق تفاضل عبارت است از

$$|S_n-L|=\left|\frac{۳}{۹}-\frac{۳}{۹}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{n+۱}-\frac{۳}{۹}\right|=\frac{۱}{۳\times ۱۰^{n+۱}}$$

اگر $n=۱$، آنگاه $|S_n-L|=\frac{۱}{۳۰۰}$

اگر $n=۲$، آنگاه $|S_n-L|=\frac{۱}{۳۰۰۰}$

و الی آخر؛ هراندازه n بزرگتر باشد، همان اندازه تفاضل کوچکتر خواهد بود. تصور کنیدکه با حریفی بازیی را شروع می‌کنیم، و او از ما می‌خواهدکه تفاضل را به‌کمتر از ۰٫۰۰۰۱ برسانیم. دراین صورت باید n را چنان بزرگ انتخاب‌کنیم‌که داشته باشیم

$$\frac{۱}{۳\times ۱۰^{n+۱}}<۰٫۰۰۰۱=\frac{۱}{۱۰^۴}$$

و آشکار است‌که هر $n\geqslant ۳$ این‌کار را انجام می‌دهد.

حال، مثال دیگری را درنظر می‌گیریم‌که در آن

$$S_n=\frac{n+۲}{n+۳}=\frac{(n+۳)-۱}{n+۳}=۱-\frac{۱}{n+۳}$$

است. مشاهده می‌کنیم کــه وقتی n بزرگ باشد، $۱/(n+۳)$ کوچك بوده و S_n نیز به ۱ نزدیك خواهد بود. بنابراین حدس می‌زنیم‌که حد $L=۱$ درست است. در راه تأیید این حدس، قدرمطلق تفاضل را درنظر می‌گیریم

$$|S_n-L|=\left|\frac{n+۲}{n+۳}-۱\right|=\left|-\frac{۱}{n+۳}\right|=\frac{۱}{n+۳}$$

فرض‌کنید رقیب ما ادعا می‌کند که می‌تواند این تفاضل را از عدد $۷/۱۰^۴=۰٫۰۰۰۷$ کوچکترسازد. آیا ما هم می‌توانیم؟ یعنی می‌توانیم نامساوی زیر را داشته باشیم؟

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۷}{۱۰^۴}$$

یا به‌عبارت دیگر، آیا نامساوی زیررا می‌توان برقرارکرد؟

$$n+۳>\frac{۱۰^۴}{۷}=\frac{۱۰۰۰۰}{۷}=۱۴۲۸\frac{۴}{۷}$$

جواب سؤال مثبت است؛ وکافی است‌که

$$n\geqslant ۱۴۲۶$$

انتخاب شود و برای چنین مقدار nی مطمئن هستیم که نامساوی

$$|S_n - L| < ۰٫۰۰۰۰۷$$

برقرار است.

این مثالها، کمك می‌کنند که تعریفهای زیر را بپذیریم.

تعریف ۱. دنبالهٔ $\{S_n\}$ تابعی‌است که به‌هرعدد طبیعی n، مقدار S_n را نسبت می‌دهد.

دستورهای

$$S_n = \frac{۱}{۳}\left[۱ - \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{n+۱}\right], \quad S_n = \frac{n+۲}{n+۳}$$

مثالهایی از دنباله هستند.

تعریف ۲. می‌گوییم دنبالهٔ $\{S_n\}$ وقتی‌که n به بینهایت میل می‌کند به عدد L، به منزلهٔ یك حد میل می‌کند، هرگاه به ازای هرعدد مثبت ε (اپسیلن) یك عدد صحیح و مثبت N وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|S_n - L| < \varepsilon \qquad \text{آنگاه}\quad n \geqslant N \quad \text{اگر} \qquad (۲.۲)$$

درصورت برقراری (۲.۲)، چنین می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

درمثال

$$S_n = \frac{n+۲}{n+۳}, \quad L = ۱$$

داریم

$$|S_n - L| = \frac{۱}{n+۳}$$

و می‌توانیم این مقدار را از هرعدد مثبت داده شدهٔ ε کوچکتر انتخاب کنیم

$$\frac{۱}{(n+۳)} < \varepsilon \quad \text{یا} \quad n+۳ > \left(\frac{۱}{\varepsilon}\right)$$

بنابراین، اگر N هر عــدد صحیح و مثبت بزرگتر از $(۱/\varepsilon) - ۳$ باشد، آنگاه به‌ازای $n \geqslant N$ داریم $|S_n - L| < \varepsilon$.

درمثال سری هندسی، داریم

$$S_n=\frac{۱}{۳}\left[۱-\frac{۱}{۱۰^{n+۱}}\right],\quad L=\frac{۱}{۳}$$

و نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$|S_n-L|=\frac{۱}{۳\times ۱۰^{n+۱}}$$

واین مقدار را می‌توانیم از هرمقدار ε مثبت داده شده کوچکتر سازیم

$$\frac{۱}{۳\times ۱۰^{n+۱}}<\varepsilon$$

یا

$$۳\times ۱۰^{n+۱}>\frac{۱}{\varepsilon}$$

یا

$$۱۰^{n+۱}>\frac{۱}{۳\varepsilon}$$

یا

$$(n+۱)>\log_{۱۰}\left(\frac{۱}{۳\varepsilon}\right)$$

بنابراین، اگر N را عدد صحیح و مثبتی که بزرگتر از

$$\log_{۱۰}\left(\frac{۱}{۳\varepsilon}\right)-۱$$

است انتخاب کنیم، مطمئن خواهیم بود که

اگر $n\geqslant N$، آنگاه $|S_n-L|<\varepsilon$

تمرینها

برای هردنبالهٔ $\{S_n\}$ که در زیرداده می‌شود، حد L را حدس بزنید! برای هر ε داده شده، یك عدد صحیح N به‌دست آورید به‌طوری‌که برای هر $n\geqslant N$، $|S_n-L|<\varepsilon$.

۱. $S_n=۲+\frac{۱}{n},\quad \varepsilon=۰٫۰۱$

۲. $S_n=\frac{۲n+۳}{n},\quad \varepsilon=۰٫۵$

۳. $S_n=\dfrac{n+\sin n}{۲n+۱},\quad \varepsilon=۰٫۱$

۴. $S_n=۱-\dfrac{۱}{۳}+\dfrac{۱}{۹}-\dfrac{۱}{۲۷}+\dots+(-۱)^n\dfrac{۱}{۳^n},\quad \varepsilon=۰٫۰۰۱$

۵. ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=L$ و $T_n=S_{n+۱}$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=L$.

۳. بعضی از خواص حد

یکی از هدفهایی که برای خود قائل شدیم، آن بود که نظریهٔ حد را تا جایی گسترش دهیم که بتوان معتبر بودن قوانینی از قبیل

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=(\lim_{n\to\infty}S_n)+(\lim_{n\to\infty}T_n) \qquad (۱.۳)$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(S_nT_n)=(\lim_{n\to\infty}S_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}T_n) \qquad (۲.۳)$$

را ثابت کرد.

مثال ۱. فرض کنید $S_n=(n+۲)/n$ و $T_n=(۲n+۱)/(n+۲)$. دراینصورت

$$S_n=۱+\frac{۲}{n},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=۱$$

$$T_n=\frac{(۲n+۴)-۳}{n+۲}=۲-\frac{۳}{n+۲},\quad \lim_{n\to\infty}T_n=۲$$

و از طرف دیگر

$$S_n+T_n=\left(۱+\frac{۲}{n}\right)+\left(۲-\frac{۳}{n+۲}\right)=۳+\frac{۲}{n}-\frac{۳}{n+۲}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=۳=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}T_n$$

همچنین

$$S_nT_n=\left(۱+\frac{۲}{n}\right)\left(۲-\frac{۳}{n+۲}\right)$$
$$=۲+\frac{۴}{n}-\frac{۳}{n+۲}-\frac{۶}{n(n+۲)}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(S_nT_n)=۲=(\lim_{n\to\infty}S_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}T_n)$$

برای اثبات تساویهای (۱.۳)و(۲.۳) باید مطالبی را درمورد قدرمطلق مرور کنیم. توجه کنید

$$|۳+۷|=|۱۰|=۱۰=|۳|+|۷|;$$
$$|۳-۷|=|-۴|=۴<|۳|+|۷|;$$
$$|-۳-۷|=|-۱۰|=۱۰=|-۳|+|-۷|$$

در واقع، اگر a و b دوعدد حقیقی باشند، آنگاه

$$|a+b|=|a|+|b|$$ هرگاه a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند

و

$$|a+b|<|a|+|b|$$ هرگاه a و b دارای علامتهای مختلفی باشند

در هرحال، نامساوی زیر همیشه برقرار است

$$|a+b|\leqslant|a|+|b| \tag{۳.۳}$$

اگر b رابا $-b$ و $|b|$ رابا $|b|=|-b|$ جایگزین کنیم بازهم نامساوی (۳.۳) برقرار خواهد بود

$$|a-b|\leqslant|a|+|b| \tag{۴.۳}$$

قضیهٔ ۱. فرض کنید $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ دنباله‌هایی، به ترتیب، با حدهای $L_۱$ و $L_۲$ باشند، در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=L_۱+L_۲ \tag{۵.۳}$$

اثبات. با فرض

$$\lim_{n\to\infty}S_n=L_۱,\quad \lim_{n\to\infty}T_n=L_۲ \tag{۶.۳}$$

باید نشان دهیم که به‌هرعدد مثبت ε، یك عدد صحیح مثبت N متناظر می‌شود به‌طوری که

$$|(S_n+T_n)-(L_۱+L_۲)|<\varepsilon \quad \text{آنگاه } n\geqslant N \text{ اگر} \tag{۷.۳}$$

حال نامساوی (۳.۳) را با قرار دادن $a=S_n-L_۱$ و $b=T_n-L_۲$ به کار می‌بریم، و طرف چپ نامساوی (۷.۳) را دوباره می‌نویسیم تا نتیجهٔ مطلوب به‌دست آید

$$\begin{aligned}|(S_n+T_n)-(L_۱+L_۲)| &= |(S_n-L_۱)+(T_n-L_۲)| \\ &\leqslant |S_n-L_۱|+|T_n-L_۱|\end{aligned}$$

از حدهای داده شده در (۶.۳)، و اینکه هرگاه ε مثبت باشد $\varepsilon/۲$ هم مثبت است، نتیجه می‌شود که به‌هر $(\varepsilon/۲) > ۰$، دوعدد صحیح $N_۱$ و $N_۲$ متناظرمی‌شوند به‌طوری که

(۸.۳ الف) اگر $n \geqslant N_۱$، آنگاه $|S_n-L_۱| < \frac{\varepsilon}{۲}$

و

(۸.۳ ب) اگر $n \geqslant N_۲$، آنگاه $|T_n-L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲}$

حال فرض‌کنید N مساوی ماکزیمم دو عدد $N_۱$و$N_۲$ است. دراین صورت اگر $n \geqslant N$، آنگاه هردو رابطهٔ (۸.۳ الف) و (۸.۳ ب) برقرار خواهند بود، و بنا براین

$$|(S_n+T_n)-(L_۱+L_۲)| \leqslant |S_n-L_۱|+|T_n-L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

درمثال۱، $S_n=۱+(۲/n)$، $T_n=۲-۳/(n+۲)$ است. اگر $\varepsilon > ۰$، آنگاه به‌ازای $n > ۴/\varepsilon$، داریم

$$|S_n-۱|=\frac{۲}{n}<\frac{\varepsilon}{۲}$$

و به‌ازای $n > (۶/\varepsilon)-۲$، داریم

$$|T_n-۲|=\frac{۳}{n+۲}<\frac{\varepsilon}{۲}$$

اگر $N_۱$ یك عدد صحیح مثبت بزرگتر یامساوی $۴/\varepsilon$ و $N_۲$ یك عدد صحیح مثبت بزرگتر یا مساوی $(۶/\varepsilon)-۲$ باشد، Nرا برابر ماکزیمم دوعدد $N_۱$ و $N_۲$ می‌گیریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید $\varepsilon=۰٫۰۱$. در این صورت $N_۱ \geqslant ۴۰۰$ و $N_۲ \geqslant ۵۹۸$، و درنتیجه $N=۵۹۸$. دراین صورت اگر $n \geqslant ۵۹۸$، آنگاه $|S_n+T_n-۳| < \varepsilon$، زیرا

$$|S_n-۱|<\frac{\varepsilon}{۲}, \qquad |T_n-۲|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

و

$$|(S_n+T_n)-۳| \leqslant |S_n-۱|+|T_n-۲| < \varepsilon$$

قبل از اینکه به حاصلضرب دنباله‌ها بپردازیم، ثابت می‌کنیم که هر دنبالهٔ همگرا

کراندار است. معانی کلمات همگرا و کراندار همان طورکه دربارهٔ دنبالهٔ $\{S_n\}$ به‌کار رفته‌اند، در زیرتعریف می‌شوند.

دنبالهٔ همگرا. دنبالهٔ $\{S_n\}$ را همگرا گوییم هرگاه دارای حدی مانند L باشد و در این صورت می‌گوییم دنباله بــه L همگراست. دنباله‌ای که دارای حد نیست واگرا نامیده می‌شود.

دنبالهٔ کراندار. دنبالهٔ $\{S_n\}$ کرانــدار است اگر عــدد مثبتی مانند B وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|S_n| \leqslant B \qquad \text{به‌ازای هر } n \in N، \tag{۹.۳}$$

مثال ۲. دنبالــهٔ $S_n = (-۱)^n$ واگراست، زیــرا اگــر n فرد باشد، آنگــاه $(-۱)^n = -۱$، و اگــر n زوج باشد آنگاه $(-۱)^n = +۱$. بنابراین عدد ثابت L وجود ندارد که به‌ازای nهای خیلی بزرگ، S_nها تقریباً برابر L باشند. با وجود این، این دنباله کراندار است، زیرا عــدد B وجود داردکــه به‌ازای تمامی مقادیر n، داریــم $|S_n| \leqslant B$. به‌عنوان مثال، می‌توانیم $B = ۲$، یا $B = ۱۰$، یا $B = ۱$ انتخاب کنیم.

مثال ۳. برای

$$S_n = \frac{n+۲}{n} = ۱ + \frac{۲}{n}$$

به‌ازای هر $n \geqslant ۱$، داریم

$$\frac{۲}{n} \leqslant ۲$$

و بنابراین

$$|S_n| \leqslant ۳$$

برای

$$T_n = \frac{۲n+۱}{n+۲} = ۲ - \frac{۳}{n+۲}$$

داریم $|T_n| \leqslant ۲$، زیرا، به‌ازای هر $n \geqslant ۱$ داریم

$$\frac{۳}{n+۲} \leqslant ۱$$

قضیهٔ ۲. هر دنبالهٔ همگرا کراندار است.

اثبات. فرض کنید $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ همگرا و حد آن L است

$$\lim_{n \to \infty} S_n = L$$

در تعریف حد، ε را مساوی ۱ قرار می‌دهیم (هر عدد مثبت دیگر نیز می‌تواند کارساز باشد). در این‌صورت می‌دانیم که عدد صحیح Nی، وجود دارد به‌طوری که

اگر $n \geqslant N$، آنگاه $|S_n - L| < ۱$

از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر $n \geqslant N$، S_n بین $L-۱$ و $L+۱$ قراردارد، بنابراین مطمئناً

(۱۰.۳) اگر $n \geqslant N$، آنگاه $|S_n| \leqslant |L| + ۱$

ممکن است نتوانیم $B_۱ = |L| + ۱$ را به‌عنوان کرانی برای تمامی دنباله به‌حساب‌آوریم، زیرا صادق بودن نامساوی (۱۰.۳) در بارهٔ جملات $|S_۱|, |S_۲|, \ldots, |S_{N-۱}|$ الزامی نیست بلکه فقط مطمئنیم که آن نامساوی برای جملات با زیرنویس بزرگتر یا مساوی N برقرار است. ولی فقط تعداد با پایانی جمله بـا زیرنویس n، $۱ \leqslant n \leqslant N-۱$ وجود دارد و اگر $B_۲$ را ماکزیمم قدرمطلق این جملات انتخاب کنیم آنگاه به‌ازای $۱ \leqslant n \leqslant N-۱$ داریم

$$|S_n| \leqslant B_۲$$

حال B را مساوی ماکزیمم دوعدد $B_۱$ و $B_۲$ می‌گیریم. در این‌صورت به‌ازای تمامی nها داریم $|S_n| \leqslant B$.

مثال ۴. فرض کنید

$$S_n = \frac{۲n - ۵}{n + ۱}$$

در این‌صورت

$$S_n = \frac{(۲n+۲) - ۷}{n+۱} = ۲ - \frac{۷}{n+۱}$$

به $L = ۲$ همگراست، و

اگر $n \geqslant ۷ = N$، آنگاه $|S_n - ۲| = \frac{۷}{n+۱} < ۱$

برای به‌دست آوردن $B_۲$، جملات $|S_۱|, |S_۲|, \ldots, |S_۶|$ را محاسبه و ماکزیمم آنها را انتخاب می‌کنیم. برای این مثال

$$S_۱ = \frac{۲-۵}{۱+۱} = -\frac{۳}{۲}, \quad S_۲ = \frac{۴-۵}{۲+۱} = -\frac{۱}{۳}, \quad S_۳ = \frac{۶-۵}{۳+۱} = \frac{۱}{۴},$$

$$S_۴ = \frac{۸-۵}{۴+۱} = \frac{۳}{۵}, \quad S_۵ = \frac{۱۰-۵}{۵+۱} = \frac{۵}{۶}, \quad S_۶ = \frac{۱۲-۵}{۶+۱} = \frac{۷}{۷} = ۱$$

قدر مطلق این اعداد عبارت است از: ۳/۲، ۱/۳، ۱/۴، ۳/۵، ۵/۶، ۱، و ماکزیمم آنها $B_۲=۳/۲$ است. ازآنجا که $L=۲$ و به‌ازای $\varepsilon=۱$، $۲+\varepsilon=۳=L+۱=B_۱$. B را برابرماکزیمم دو عدد ۳/۲ و ۳ می‌گیریم، یعنی $B=۳$. در این‌صورت به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم

$$\left|\frac{۲n-۵}{n+۱}\right|\leqslant ۳$$

اکنون، آماده‌ایم که قضیه‌ای در بارهٔ حد حاصلضرب دو دنباله اثبات کنیم.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا با حدهای $L_۱$ و $L_۲$ هستند، دراین صورت

$$\lim_{n\to\infty}(S_nT_n)=L_۱L_۲ \qquad (۱۱.۳)$$

اثبات. فرض کنید ε عدد مثبت دلخواهی است. می‌خواهیم نشان دهیم که یك عدد طبیعی N وجود دارد به‌طوری که

$$\text{اگر } n\geqslant N\text{، آنگاه } \quad |S_nT_n-L_۱L_۲|<\varepsilon \qquad (۱۲.۳)$$

در اینجا، $S_nT_n-L_۱L_۲$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$S_nT_n-L_۱L_۲=S_nT_n-L_۱T_n+L_۱T_n-L_۱L_۲$$

و نامساوی (۳.۳) را با قراردادن $a=S_nT_n-L_۱T_n$ و $b=L_۱T_n-L_۱L_۲$ به‌کار می‌بریم. پس خواهیم داشت

$$|S_nT_n-L_۱L_۲|\leqslant|S_nT_n-L_۱T_n|+|L_۱T_n-L_۱L_۲|$$

یا

$$|S_nT_n-L_۱L_۲|\leqslant|(S_n-L_۱)T_n|+|L_۱(T_n-L_۲)| \qquad (۱۳.۳)$$

مطلب دیگری راکه در بارهٔ قدر مطلق احتیاج داریم، عبارت است از

$$|cd|=|c|\cdot|d|$$

بدین‌ترتیب، باکمك تساوی بالا امکان می‌یابیم که (۱۳.۳) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$|S_nT_n-L_۱L_۲|\leqslant|S_n-L_۱|\cdot|T_n|+|L_۱|\cdot|T_n-L_۲| \qquad (۱۴.۳)$$

اگر نامساوی (۱۴.۳) را با (۱۲.۳) مقایسه‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که اگر عدد صحیح Nی به‌دست آوریم که به‌ازای $n\geqslant N$ هردو جملهٔ طرف راست نامساوی (۱۴.۳) از $\varepsilon/۲$ کوچکتر باشد به‌هدف خود رسیده‌ایم. قضیه۲ را درمورد $\{T_n\}$ به‌کار می‌بریم: چون $\{T_n\}$ همگرا است، پس کراندار است و عددی مانند B وجود دارد به‌طوری که

$$|T_n| \leqslant B \qquad \text{به‌ازای هر } n$$

بنا براین

$$|S_n - L_1| \cdot |T_n| \leqslant |S_n - L_1| \cdot B \tag{۱۵.۳}$$

هدف آن است که طرف راست (۱۵.۳) را از $\varepsilon/۲$ کوچکتر سازیم. چون B منفی نیست، لذا این موضوع با

$$|S_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{۲B} \tag{۱۶.۳ الف}$$

معادل است. اما اگر B صفر باشد، طرف راست (۱۶.۳ الف) بی‌معنا خواهد بود. اگر در مخرج (۱۶.۳ الف) به‌جای B، مقدار $۱+B$ را قرار دهیم، می‌توانیم هر نـوع اشکال تقسیم بر صفر را رفع کنیم. چون $\{S_n\}$ به L همگراست، پس یك عدد مثبت N_1 وجود دارد به‌طوری که

$$|S_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{۲(۱+B)} \qquad \text{اگر } n \geqslant N_1\text{، آنگاه} \tag{۱۶.۳ ب}$$

چون $B/(۱+B) < ۱$، پس، اگر $n \geqslant N_1$، آنگاه

$$|S_n - L_1| \cdot |T_n| \leqslant |S_n - L_1| \cdot B < \frac{\varepsilon}{۲} \tag{۱۷.۳}$$

به‌همین ترتیب عدد طبیعی $N_۲$ وجود دارد به‌طوری که

$$|T_n - L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲(۱+|L_1|)} \qquad \text{اگر } n \geqslant N_۲\text{، آنگاه}$$

چون $|L_1|/(۱+|L_1|) < ۱$، پس

$$|L_1| \cdot |T_n - L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{اگر } n \geqslant N_۲\text{، آنگاه} \tag{۱۸.۳}$$

حال، N را با ماکزیمم دو عدد N_1 و $N_۲$ برابر می‌گیریم. دراین صورت به‌ازای $n \geqslant N$، هردو نامساوی (۱۷.۳) و(۱۸.۳) برقرار می‌شوند و به‌ازای هر $n \geqslant N$ [بر اساس (۱۴.۳)] داریم

$$\begin{aligned}|S_nT_n - L_1L_۲| &\leqslant |S_n - L_1| \cdot |T_n| + |L_1| \cdot |T_n - L_۲| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon\end{aligned}$$

مثال ۵. همانند مثال ۳، فرض کنید

$$S_n=\frac{n+۲}{n}, \quad T_n=\frac{۲n+۱}{n+۲}=\frac{(۲n+۴)-۳}{n+۲}$$

در این‌صورت $L_۱=\lim_{n\to\infty} S_n=۱$ و $L_۲=\lim_{n\to\infty} T_n=۲$. در مثال ۳، به‌دست آوردیم که $|T_n|\leqslant ۲=B$ و نامساوی (۱۶.۳ب) در اثبات قضیهٔ ۳ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$|S_n-۱|<\frac{\varepsilon}{۲(۱+۲)}=\frac{\varepsilon}{۶} \qquad (۱۹.۳)$$

چون

$$S_n-۱=\left(۱+\frac{۲}{n}\right)-۱=\frac{۲}{n}$$

پس اگر

$$n>\frac{۱۲}{\varepsilon} \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{n}<\frac{\varepsilon}{۶}$$

نامساوی (۱۹.۳) برقرار خواهد بود. بنابراین $N_۱$ را می‌توان هرعدد صحیح بزرگتر از $۱۲/\varepsilon$ فرض کرد. چون $L=۱$، لذا نامساوی (۱۸.۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$|۱|\cdot|T_n-۲|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۲۰.۳)$$

چون

$$T_n=۲-\frac{۳}{n+۲}$$

لذا اگر

$$n>\frac{۶}{\varepsilon}-۲ \quad \text{یا} \quad \frac{۳}{n+۲}<\frac{\varepsilon}{۲}$$

باشد نامساوی (۲۰.۳) برقرارخواهد بود. اکنون $N_۲$ را می‌توان هرعدد صحیح بزرگتر از $۲-(۶/\varepsilon)$ درنظر گرفت. از آنجاکه $۲-(۶/\varepsilon)>(۱۲/\varepsilon)$، می‌توانیم قرار دهیم $N=N_۱$ و مطمئن باشیم‌که نامساویهای (۱۹.۳) و (۲۰.۳)، به‌ازای هر n بزرگتر یا مساوی N، برقرار هستند. برای مثال، اگر حریف ما $\varepsilon=۰{,}۰۰۳$ را ارائه دهد، آنگاه $۱۲/\varepsilon=۴۰۰۰$ و ما N را برابر ۴۰۰۱ انتخاب می‌کنیم. با وجود این، توجه کنید که در مثال۱ به‌دست آوردیم که

$$S_nT_n = ۲ + \frac{۴}{n} - \frac{۳}{n+۲} - \frac{۶}{n(n+۲)}$$
$$= ۲ + \frac{(۴n+۸) - ۳n - ۶}{n(n+۲)}$$
$$= ۲ + \frac{n+۲}{n(n+۲)} = ۲ + \frac{۱}{n}$$

پس

$$|S_nT_n - ۲| = \frac{۱}{n}$$

و اگر $\varepsilon = ۰٫۰۰۳$، می‌توانیم $۱/n$ را کوچکتر از ε انتخاب کنیم مشروط بر اینکه $n \geqslant ۳۳۴$. بنابراین $N = ۳۳۴$ نیز شرایط لازم را برقرار می‌کند، یعنی

اگر $n \geqslant N$، آنگاه $|S_nT_n - ۲| < \varepsilon$

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که Nی که در نتیجهٔ دنبال کردن گامهای موجود در اثبات قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آید الزاماً کوچکترین Nی نیست که برای هر ε مثبت داده شده، لازم است. در هرحال، در تعریف حد نیز به‌دست آوردن کوچکترین N ممکن الزامی نیست. اما، تنها، نشان دادن اینکه عدد طبیعی مثبت Nی وجود دارد جوابگوی حریف خواهد بود.

قضایای ۲ و ۳ سؤال حد مجموع و حد حاصلضرب را جواب می‌گویند. از این قضایا، نتایج سادهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید.

نتیجهٔ ۱.۳ اگر $\{S_n\}$ به L همگرا باشد و k هرعدد دلخواهی فرض شود، آنگاه $\{kS_n\}$ به kL همگرا خواهد بود.

اثبات. به‌ازای هر n، فرض کنید $T_n = k$. در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = k$ زیرا، به ازای هر n، $T_n - k$ صفر است و بنابراین، اگر $\varepsilon > ۰$، می‌توانیم با قرار دادن N مساوی ۱، اطمینان داشته باشیم که

اگر $n \geqslant N$، آنگاه $|T_n - k| < \varepsilon$

بنابراین دنبالهٔ $\{T_n\}$ به k همگراست، و اگر $L_۱ = L$ و $L_۲ = k$، آنگاه ازقضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} S_nT_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = kL$$

نتیجهٔ ۲.۳ اگر $\{S_n\}$ به $L_۱$ و $\{T_n\}$ به $L_۲$ همگرا باشند، آنگاه
$$\lim_{n\to\infty}(S_n - T_n) = L_۱ - L_۲$$

اثبات. برمبنای نتیجهٔ ۱، و با فرض $k=-۱$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}(-T_n)=-L_۲$$

حال قضیهٔ ۱ را در مورد دنباله‌های همگرای $\{S_n\}$ و $\{-T_n\}$ به‌کار می‌بریم.

مثال ۶. فرض کنید

$$S_n=\frac{۲n+\cos n}{n}\,,\qquad T_n=\frac{n+۱}{۲n+۳}$$

در این‌صورت

$$S_n=۲+\frac{\cos n}{n},\qquad |S_n-۲|=\left|\frac{\cos n}{n}\right|\leqslant\frac{۱}{n}$$

و بنابراین $\lim_{n\to\infty}S_n=۲$. هم‌چنین

$$T_n=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲n+۲}{۲n+۳}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲n+۳-۱}{۲n+۳}\right)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۳}\right)$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}T_n=۱/۲$. در این‌صورت

$$S_n-T_n=\frac{۲n+\cos n}{n}-\frac{n+۱}{۲n+۳}=۲+\frac{\cos n}{n}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۳}\right)$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-T_n)=۲-\frac{۱}{۲}=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}T_n$$

اینك فقط سؤال خارج‌قسمت باقیمانده است. برای این‌کار، ابتدا وارون یك دنباله را در نظر می‌گیریم.

مثال ۷. اگر $T_n=(n+۱)/(۲n+۳)$، آنگاه

$$\frac{۱}{T_n}=\frac{۲n+۳}{n+۱}=\frac{(۲n+۲)+۱}{n+۱}=۲+\frac{۱}{n+۱}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{T_n}\right)=۲=\frac{۱}{\lim_{n\to\infty}T_n}$$

حال قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. اگر S_n به‌حد مخالف صفر L، همگرا باشد، آنگاه برای nهای خیلی بزرگ، S_n صفر نبوده و داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\frac{1}{L}$$

اثبات. چون $L\neq 0$ است، می‌توانیم

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}|L|$$

را به‌عنوان عدد مثبتی فرض کنیم، و می‌دانیم که به‌خاطر همگرا بودن S_n به L، یك عدد صحیح و مثبت N_1 وجود دارد به‌طوری‌که

(۲۲.۳) اگر $n\geqslant N_1$، آنگاه $|S_n-L|<\varepsilon_1$

اگر بنویسیم

$$L=(L-S_n)+S_n$$

و نامساوی

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

را در طرف راست تساوی به‌کاربریم، برای هر $n\geqslant N$، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$|L|=|(L-S_n)+S_n|\leqslant|L-S_n|+|S_n|<\varepsilon_1+|S_n| \qquad (۲۳.۳)$$

از قسمت اول و آخر (۲۳.۳) نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\varepsilon_1+|S_n|>|L|$$

یا

$$|S_n|>|L|-\varepsilon_1=|L|-\frac{1}{2}|L|=\frac{1}{2}|L|$$

یا

(۲۴.۳) اگر $n\geqslant N_1$، آنگاه $|S_n|>\frac{1}{2}|L|$

بنابراین، برای هر $n\geqslant N_1$، S_n صفر نبوده، و

$$\left|\frac{1}{S_n}-\frac{1}{L}\right|=\left|\frac{L-S_n}{LS_n}\right|=\frac{|L-S_n|}{|L|}\cdot\frac{1}{|S_n|}\leqslant\frac{|L-S_n|}{|L|}\cdot\frac{2}{|L|} \qquad (۲۵.۳)$$

نامساوی آخر از (۲۴.۳) و این مطلب که

$$\text{اگر } |S_n| > \frac{|L|}{۲}\text{، آنگاه } \frac{۱}{|S_n|} < \frac{۲}{|L|}$$

به‌دست می‌آید. حال به‌حریف خود اجازه می‌دهیم که یك ε مثبت مشخص کند. باید نشان دهیم که یك عدد صحیح مثبت N وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{اگر } n \geqslant N\text{، آنگاه } \left|\frac{۱}{S_n}-\frac{۱}{L}\right| < \varepsilon$$

ابتدا باید Nی به‌دست آوریم که حداقل به‌بزرگی $N_۱$ باشد، و سپس این مطلب را به‌کار گیریم که $\{S_n\}$ به L همگراست. بدین‌وسیله می‌توانیم قسمت آخر نامساوی (۲۵.۳) را از ε کوچکتر سازیم مشروط براینکه عدد $N_۲$ی مثبتی به‌دست آوریم که

$$\text{اگر } n \geqslant N_۲\text{، آنگاه } |L-S_n| < \frac{\varepsilon|L|^۲}{۲} \qquad (۲۶.۳)$$

حال N را برابر ماکزیمم دوعدد $N_۱$ و $N_۲$ می‌گیریم، و بدین‌ترتیب (۲۵.۳) و(۲۶.۳) هردو برقرار خواهند بود. در نتیجه اگر $n \geqslant N$، آنگاه

$$\left|\frac{۱}{S_n}-\frac{۱}{L}\right| \leqslant \frac{۲|L-S_n|}{|L|^۲} < \frac{۲}{|L|^۲}\frac{\varepsilon|L|^۲}{۲} = \varepsilon$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{S_n}=\frac{۱}{L}$$

مثال ۸. برای آشکارتر کردن اثبات قضیهٔ ۴، فرض کنید

$$S_n=\frac{۳(۲^n)-۱}{۲^n}=۳-\frac{۱}{۲^n}$$

در این‌صورت

$$\lim_{n\to\infty}S_n=۳$$

و فرض کنید $\varepsilon_۱ = ۳/۲$. n را چه اندازه بزرگ انتخاب کنیم تا داشته باشیم

$$|S_n-۳| < \frac{۳}{۲} \qquad (۲۷.۳)$$

نامساوی (۲۷.۳) همان نامساوی

$$\frac{۱}{۲^n} < \frac{۳}{۲} \quad \text{یا} \quad ۲^n > \frac{۲}{۳}$$

است که برای هر $n \geqslant 1$ برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $N_1 = 1$. حال فرض کنید حریف ما $\varepsilon = 0.02$ را پیشنهاد می‌کند واز ما می‌خواهدکه نامساوی زیر را برقرار کنیم

$$\left|\frac{1}{S_n}-\frac{1}{3}\right| < 0.02$$

اگر با فرض $L=3$، اثبات را دنبال کنیم، نامساوی (۲۶.۳) به‌صورت زیر در می‌آید

$$|3-S_n| < \frac{(0.02)(9)}{2} = 0.09$$

که همان

$$\frac{1}{2^n} < \frac{9}{100} \qquad \text{یا} \qquad 2^n > \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

است. برای برقراری این نامساوی فرض می‌کنیم $N_2 = 4$، و اگر $n \geqslant N_2$، آنگاه

$$2^n \geqslant 16 > \frac{100}{9}$$

حال، N را مساوی ماکزیمم دوعدد $N_1 = 1$ و $N_2 = 4$ می‌گیریم؛ بنابراین $N = 4$. اینك ادعا می‌کنیم که

$$\text{اگر } n \geqslant 4 \text{، آنگاه} \qquad \left|\frac{1}{S_n}-\frac{1}{3}\right| < 0.02$$

در واقع

$$\frac{1}{S_n} = \frac{2^n}{3(2^n)-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3(2^n)}{3(2^n)-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3(2^n)-1+1}{3(2^n)-1}$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3(2^n)-1}$$

بنابراین نامساوی

$$\left|\frac{1}{S_n}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3(2^n)-1} < 0.02$$

برقرار است اگر

$$9(2^n)-3 > 50 \text{،} \qquad \text{یا} \qquad 9(2^n) > 53$$

یا

$$2^n > \frac{53}{9} \text{،} \qquad \text{یا} \qquad n \geqslant 3$$

پس درمواجهه با ادعای ۲ه‌ره $=\varepsilon$، N را برابر ۳ انتخاب می‌کنیم. این N کمی کوچکتر از جوابی است که با دنبال‌کردن مراحل قضیهٔ ۴ به‌دست آوردیم.

نتیجهٔ ۱۰۴ اگر $\{S_n\}$ به L_1 و $\{T_n\}$ به L_2 همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{L_n}=\frac{L_1}{L_2} \qquad L\neq 0 \text{ بافرض }$$

اثبات. بر مبنای قضیهٔ ۴ داریم $\lim_{n\to\infty}(1/T_n)=1/L_2$، و با به‌کاربردن قضیهٔ ۳ روی حاصلضرب $(1/T_n)\cdot S_n$، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=(\lim_{n\to\infty}S_n)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T_n}\right)=L_1\cdot\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

مثال ۹

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{5+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{2}{5}$$

مثال ۱۰. حد زیر را به‌دست آورید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n-3}{3n^2+5n+6}$$

حل. صورت و مخرج کسر را بر n^2، بزرگترین توان n که در صورت و مخرج ظاهر می‌شود، تقسیم می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{2n^2+4n-3}{3n^2+5n+6}=\frac{2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{S_n}{T_n}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=2$$

و

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)=3$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} T_n \neq ۰$، لذا از نتیجهٔ ۱.۴ نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{\lim S_n}{\lim T_n} = \frac{۲}{۳}$$

توضیح. در مثال فوق برای محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ می‌توانیم از قضیهٔ ۱ استفاده کنیم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(۲+\frac{۴}{n}-\frac{۳}{n^۲}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} (۲) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{۴}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-۳}{n^۲}\right)\\ &= ۲+۰+۰\\ &= ۲\end{aligned}$$

زیرا به‌آسانی (با استفاده از تعریف حد) می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۲} = ۰$$

این قسمت را با اثبات اینکــه دنبالهٔ همگرا دارای حد منحصر به‌فردی است، به پایان می‌بریم.

قضیهٔ ۵. فرض کنید $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ همگــرا است. در این‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ منحصر به‌فرد است.

اثبات. (با برهان خلف). فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ دو عدد مختلف باشند به‌طوری کــه به‌ازای هرعدد مثبت ε، دو عدد صحیح و مثبت $N_۱$ و $N_۲$ وجود دارند به‌طوری که

(۲۸.۳ الف) اگر $n \geqslant N_۱$، آنگاه $|S_n - L_۱| < \varepsilon$

و

(۲۸.۳ ب) اگر $n \geqslant N_۲$، آنگاه $|S_n - L_۲| < \varepsilon$

اگر N برابرماکزیمم $N_۱$ و$N_۲$ فرض شود، آنگاه از (۲۸.۳ الف) و(۲۸.۳ ب) نتیجه می‌شود که اگر $n \geqslant N$، آنگاه

(۲۹.۳) $$|L_۱ - L_۲| = |L_۱ - S_n + S_n - L_۲| \leqslant |L_۱ - S_n| + |S_n - L_۲| < ۲\varepsilon$$

با وجود این، اگر $L_۱ \neq L_۲$، آنگاه $|L_۱ - L_۲|$ مثبت است، و بی‌هیچ مانعی در(۲۹.۳) می‌توانیم فرض کنیم $\varepsilon = (۱/۲)|L_۱ - L_۲|$ و نتیجه بگیریم

$$|L_۱-L_۲|<|L_۱-L_۲|$$

که نامساوی نادرستی است. این تناقض از فرض اینکه یك دنبالهٔ همگرا می‌تواند دو حد مختلف $L_۱$ و $L_۲$ داشته باشد، ناشی می‌شود، و بنا براین چنین فرضی منطقی نیست. حدیك دنبالهٔ همگرا منحصر به‌فرد است.

تمرینها

۱. ثابت‌کنیدکه $\lim\limits_{n\to\infty} ۱/n=۰$. [اگر $\varepsilon>۰$ داده شده باشد، باید N به چه بزرگی انتخاب شود تا به‌ازای $n\geqslant N$، برقراری‌نامساوی $|۰-(۱/n)|<\varepsilon$ تضمین شود؟]

۲. ثابت‌کنیدکه $\lim\limits_{n\to\infty}(۱/n^۲)=۰$: (الف) با به‌کار بردن قضیهٔ ۳ و تمرین ۱، و (ب) با استفادهٔ مستقیم ازاین تعریف‌که N به‌چه بزرگی باشد تا به‌ازای $n\geqslant N$،

$$\left|\frac{۱}{n^۲}-۰\right|<\varepsilon$$

۳. اگر $S_n=\dfrac{۲n-۳}{۳n+۵}$ و $T_n=\dfrac{n^۲+۱}{۲n^۲+۳}$. مطلوب است

(الف) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (ب) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$

(پ) $\lim\limits_{n\to\infty}(۲S_n+۳T_n)$ (ت) $\lim\limits_{n\to\infty}(S_nT_n^۲)$

(ث) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n^۲}{T_n}$

حدهای زیر را محاسبه‌کنید

۴. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۲+۳\sin n}{۴+n}$ ۵. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۲n^۲+۳\sin n}{۴n^۲+n}$

۶. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{۲+۳n}{۴+n}}$. (آیا می‌توانید جواب خود را به‌این مسأله توجیه کنید؟)

۷. ثابت‌کنید: اگر $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ کراندار و $\{T_n\}$ یك دنبالهٔ همگرا به‌صفر باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n=۰$. (از آنجایی‌که فرض نکردیم‌که $\{S_n\}$ همگراست، حکم این مسأله را نمی‌توان ازقضیهٔ ۳ نتیجه گرفت، و باید یك اثبات مستقیم ارائه‌کرد.)

۸. با به‌کار بردن قضایای ۱و۳، ثابت‌کنیدکه اگردنباله‌های $\{S_n\}$، $\{T_n\}$، و $\{U_n\}$ همگرا باشند، آنگاه

$$\lim(S_n+T_n+U_n)=\lim S_n+\lim T_n+\lim U_n$$

و

$$\lim(S_nT_nU_n)=(\lim S_n)\cdot(\lim T_n)\cdot(\lim U_n)$$

که در همهٔ آنها n به‌سمت ∞ میل می‌کند. این نتیجه را به‌تعداد دلخواه باپایانی از دنباله‌های همگرا تعمیم دهید!

۴. نمایش نموداری دنباله‌ها و حدها. دنباله‌های یکنوا

دنباله‌ای که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_n=\frac{۲n+۳}{n+۵}=\frac{(۲n+۱۰)-۷}{n+۵}$$

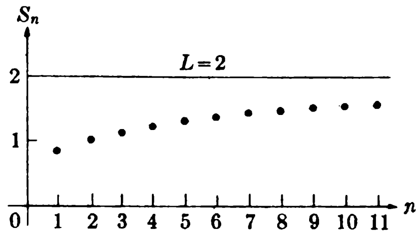
را می‌توان با نموداری متشکل‌از نقاط $((n,\ ۲-۷/(n+۵))$، به‌ازای $n=۱,\ ۲,\ ۳,\ldots$ نمایش داد (شکل۲). در این مثال، می‌بینیم که نمودار با افزایش n بالا می‌رود، و تمامی S_nها از ۲ کوچکترند. این مثالی است از دنباله‌های یکنوای افزایشی که از بالا کراندارند، از بالا کراندار بودن را اینك تعریف می‌کنیم.

دنباله‌های یکنوا. دنبالهٔ $\{S_n\}$، دنباله‌ای به طور یکنوا افزایشی (یا یکنوای افزایشی) نامیده می‌شود اگر به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n، داشته باشیم $S_{n+۱}\geqslant S_n$. به‌همین ترتیب، $\{S_n\}$ را یك دنبالهٔ یکنوای کاهشی می‌نامیم هرگاه برای هرعدد صحیح و مثبت n، داشته باشیم: $S_{n+۱}\leqslant S_n$.

کراندار بالا، یا کراندار پایین. دنبالهٔ $\{S_n\}$ کراندار بالا (یا کراندار از بالا) نامیده می‌شود اگر یك عدد M وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر n، $S_n\leqslant M$. به‌همین ترتیب، $\{S_n\}$ کراندار پایین است اگر عددی مانند K وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، $S_n\geqslant K$.

توضیح ۱. دنبالهٔ ثابت، یعنی دنباله‌ای که در آن $\ldots=S_n=S_{n+۱}=\ldots=S_۱=S_۲$، است هم یکنوای افزایشی و هم یکنوای کاهشی است، زیرا به‌ازای هر n، داریم $S_{n+۱}\geqslant S_n$ و $S_{n+۱}\leqslant S_n$. دنباله‌های ثابت تنها دنباله‌هایی هستندکه هم یکنوای‌افزایشی و هم یکنوای کاهشی می‌باشند.

توضیح ۲. از قضیهٔ ۲ بخش قبلی می‌دانیم که هر دنبالهٔ همگرا کراندار است. اگر به‌ازای هر n، داشته باشیم $|S_n|\leqslant B$، آنگاه $-B\leqslant S_n\leqslant B$، بنابراین دنبالهٔ همگرا هم‌کراندار بالا و هم‌کراندار پایین است. هم‌چنین واضح است که هردنباله‌ای که‌کراندار از بالا و پایین باشد، آنگاه کراندار است، زیرا اگر $S_n\leqslant M$ و $S_n\geqslant K$، آنگاه $K\leqslant S_n\leqslant M$، و می‌توان B را برابرماکزیمم دومقدار $|M|$ و $|K|$ درنظر گرفت، و در این صورت، داریم $|S_n|\leqslant B$. به‌عنوان مثال، اگر $K=-۳$ و $M=۲$ آنگاه $B=۳$؛



شکل ۲. قسمتی از نمودار دنبالهٔ

$$S_n=\frac{2n+3}{n+5}=2-\frac{7}{n+5}$$

جدول برای شکل ۲

n	$S_n=\frac{2n+3}{n+5}$	n	$S_n=\frac{2n+3}{n+5}$
۱	$\frac{5}{6}\approx 0٫83$	۷	$\frac{17}{12}\approx 1٫42$
۲	$\frac{7}{7}=1٫00$	۸	$\frac{19}{13}\approx 1٫46$
۳	$\frac{9}{8}\approx 1٫13$	۹	$\frac{21}{14}=1٫50$
۴	$\frac{11}{9}\approx 1٫22$	۱۰	$\frac{23}{15}\approx 1٫53$
۵	$\frac{13}{10}=1٫30$	۱۱	$\frac{25}{16}\approx 1٫58$
۶	$\frac{15}{11}\approx 1٫36$		

اگر $K=2$، $M=5$، آنگاه $B=5$؛ اگر $K=-5$، $M=-2$، آنگاه $B=5$.

توضیح ۳. یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی از پایین کراندار است زیرا تمامی جمله‌های آن حداقل به‌بزرگی جملهٔ اول، S_1، هستند.

توضیح ۴. بعضی اوقات یك دنباله به‌نحوی تعریف می‌شود که هیچ فرمول ساده‌ای برای

بیان S_n برحسب n، نمی‌توان به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، فرض کنید

$$S_1 = 1, \quad S_2 = S_1 + 1, \quad S_3 = S_2 + \frac{1}{2!}$$

و به‌ازای هر n، داریم $S_n = S_{n-1} + 1/(n-1)!$. در این صورت به سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت که

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \qquad \text{به‌ازای هر } n \geqslant 4 \qquad (1.4)$$

اما هیچ راه ساده‌ای برای ترکیب این‌کسرها و یافتن آنچه‌که یك فرمول بسته برای بیان جمع باشد، وجود ندارد. برحسب اتفاق، یك ثـابت خیلی مهم ریاضی، e، که به عنوان پایهٔ‌لگاریتم طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد، حد دنبالهٔ $\{S_n\}$ است‌که در(۱.۴) تعریف شده است، سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توانیم مطمئن شویم که دنبالهٔ (۱.۴) دارای حد است در حالی‌که هیچ فرمول بسته‌ای برای بیان S_n نداریم؟ جواب این سؤال باقضیه‌ای‌که بزودی ثابت خواهیم‌کرد، داده می‌شود، این قضیه می‌گوید که هر دنبالهٔ یکنوای کراندار همگراست. برای اثبات این قضیه، به اصل کمال دستگاه اعداد حقیقی نیازمندیم.

اصل‌کمال. فرض کنید A یك مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی است کـه از بالا کرانـدار است. در این صورت عدد حقیقی منحصر به فردی چون M وجود دارد ــ کـه سوپریمم[1] A نامیده شده وبا $\sup A$ نمایش داده می‌شود ــ به‌طوری‌که $\sup A$ کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ A است. مشابهاً، اگر A یك مجموعهٔ غیرتهی ازاعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار است، آنگاه عدد حقیقی منحصر به‌فردی مـانند m وجود دارد ــ که اینفیمم[2] A نامیده شده وبا $\inf A$ نشان‌داده می‌شود ــ به‌طوری‌که $\inf A$ بزرگترین‌کران پایین برای مجموعهٔ A است.

مثال ۱. فرض‌کنید A مجموعهٔ اعدادگویای بزرگتراز ۱ باشد به طوری‌که مربع آنها از ۲ کوچکتر است. دراین‌صورت A غیرتهی است زیـرا شامل ۴ر۱ می‌باشد. این مجموعه از پایین با ۱ وازبالا با ۵ر۱ کراندار است. برمبنای اصل‌کمال، یك عدد حقیقی منحصر به‌فردی (که لازم نیست‌گویا باشد) وجود داردکه سوپریمم مجموعهٔ A است، زیرا A متشکل از کلیهٔ اعدادگویای x است به‌طوری‌که $1 < x < \sqrt{2}$، و به‌سادگی مشاهده می‌کنیم که

$$\sup A = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \inf A = 1$$

حال به‌مهمترین قضیه دربارهٔ دنباله‌های یکنوای کراندار می‌رسیم.

---

1. supremum 2. infimum

قضیهٔ ۵. هر دنبالهٔ یکنوای کراندار همگراست.

اثبات. این قضیه را برای دنباله‌های یکنوای افزایشی اثبات می‌کنیم؛ اثبات برای دنباله‌های کاهشی نیز تقریباً یکسان است. فرض کنید $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی کراندار باشد. فرض‌کنید بـه ازای $n=۱, ۲, ۳, \ldots$، A مجموعهٔ تمامی S_nهاست. دراین‌صورت A غیرتهی وکرانداراست وبنابراین عددی مانند L وجود دارد به‌طوری‌که

$$L=\sup A$$

ادعا می‌کنیم‌که $\{S_n\}$ به L همگراست. زیـرا فرض‌کنید ε یك عدد مثبت دلخواه است. در این صورت $L-\varepsilon<L$، که در آن L کوچکترین کران بالای A است. پس $L-\varepsilon$ یك‌کران بالای A نیست. بنابراین به‌ازای یك عدد صحیح ومثبت N داریم $S_N>L-\varepsilon$. ازآنجاکه دنباله یکنوای افزایشی‌است، پس به‌ازای هر $n\geqslant N$، داریم $S_n\geqslant S_N$. بنابراین

$$S_n>L-\varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant N \tag{۲.۴}$$

اما L یك‌کران بالاست، پس

$$S_n\leqslant L \qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant ۱ \tag{۳.۴}$$

از روابط (۲.۴) و (۳.۴) نتیجه می‌شود که

$$L-\varepsilon<S_n<L \qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant N \tag{۴.۴}$$

واز اینجا نتیجه می‌شود

$$\text{اگر } n\geqslant N\text{، آنگاه} \qquad |S_n-L|<\varepsilon$$

بنابراین، $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=L$.

مثال ۲. دنباله‌ای را که به‌صورت زیرتعریف شده است درنظر بگیرید

$$S_۱=۱,\quad S_۲=۱+\frac{۱}{۱!},\quad S_۳=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}$$

و به‌ازای هر $n\geqslant ۴$

$$S_n=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{(n-۱)!}$$

ازآنجا که $S_{n+۱}=S_n+(۱/n!)$، لذا دنبالهٔ $\{S_n\}$ یکنوای افزایشی است. اگر بتوانیم نشان دهیم که‌کراندار بالا نیز هست، درآن صورت می‌توانیم از قضیهٔ ۵ نتیجه بگیریم که دارای حد است. بـرای به‌دست‌آوردن یك‌کران بالا مشاهده می‌کنیم که برای هر $n\geqslant ۲$،

$n\ldots ۳ \cdot ۲ \cdot ۱ = n!$ دارای $n-۱$ عامل است که جملگی مساوی یا بزرگتر از ۲ هستند، بنابراین

$$n! \geqslant ۲^{n-۱} \qquad n \geqslant ۲ \text{ به‌ازای هر }$$

پس

$$\frac{۱}{n!} \leqslant \frac{۱}{۲^{n-۱}} \qquad n \geqslant ۲ \text{ به‌ازای هر }$$

و

$$\begin{aligned} S_n &= ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)!} \\ &\leqslant ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۲}} \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

درطرف راست (۵.۴) جملات بعد ازجملهٔ اول، تشکیل یك تصاعد هندسی با مجموع

$$۱ \times \left[\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}}{۱-\frac{۱}{۲}}\right] = ۲\left[۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\right] = ۲-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۲}$$

می‌دهند. بنابراین نامساوی (۵.۴) به‌صورت زیر در می‌آید

$$S_n \leqslant ۱ + ۲ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۲} \tag{۶.۴}$$

بالاخره، ازآنجا که $(۱/۲)^{n-۲}$ مثبت است، (۶.۴) را می‌توان با

$$S_n < ۳ \tag{۷.۴}$$

جایگزین کرد. بنابراین، از $S_{n+۱} > S_n$ و $S < ۳$ (به‌ازای همهٔ nها)، می‌توان نتیجه گرفت که $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی کراندار است، بنابراین برطبق قضیهٔ ۵ این دنباله همگراست. حد آن، e نامیده می‌شود

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)!}\right) \tag{۸.۴ الف}$$

واین را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots \tag{۸.۴ ب}$$

یا به‌طور خلاصه

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots \qquad (\text{۸.۴ پ})$$

اثبات قضیهٔ ۵ نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} S_n$ کوچکترین کران بالای $\{S_n\}$ است. از آنجا که از نامساوی(۷.۴) دیده می‌شود که ۳ یك کران بالای دنباله است، لذا $e\leqslant 3$. عدد e با تقریب هزاران رقم اعشاری محاسبه شده است. تا ۱۵ رقم اعشاری عبارت است از

$$e=2.718281828459045$$

مثال ۳. یك دنبالهٔ $\{S_n\}$ به‌صورت $S_1=1$، $S_{n+1}=2+\sqrt{S_n}$ تعریف‌می‌شود. آیا این دنباله همگراست؟ اگرچنین است، حد آن چیست؟

حل.

$$S_2=2+\sqrt{1}=3>S_1,$$

$$S_3=2+\sqrt{S_2}=2+\sqrt{3}>S_2$$

حال، اگر به‌ازای nی داشته باشیم: $S_n>S_{n-1}$، آنگاه $\sqrt{S_n}>\sqrt{S_{n-1}}$ و

$$S_{n+1}=2+\sqrt{S_n}>2+\sqrt{S_{n-1}}=S_n$$

بنابراین، با استقرا روی n، به ازای هرعدد صحیح مثبت n، داریم $S_{n+1}>S_n$. بنابراین $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی‌است. آیا این دنباله‌کراندار‌است؟ توجه کنید که

$$S_1=1,\qquad S_2=3,\qquad S_3=2+\sqrt{3}$$

جملگی کمتراز ۴ می‌باشند واگر S_n کمتراز ۴ باشد، آنگاه

$$S_{n+1}=2+\sqrt{S_n}<2+\sqrt{4}=4$$

پس $S_{n+1}<4$. بنابراین، با استقرا روی n، نتیجه می‌شود که

$$S_n<4 \qquad \text{به‌ازای هر } n$$

از آنجا که $\{S_n\}$ یکنوای افزایشی و کراندار است، لذا قضیهٔ ۵ تضمین می‌کند که Lی وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} S_n=L$$

به‌همین ترتیب، $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=L$، و* $\lim_{n\to\infty}\sqrt{S_n}=\sqrt{L}$، درنتیجه

---

* برای اثبات اینکه $\lim_{n\to\infty}\sqrt{S_n}=\sqrt{L}$ می‌توانیم ازاین‌مطلب استفاده کنیم که‌اگر $T_n=\sqrt{S_n}$،

←

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+۱}=\lim_{n\to\infty}(۲+\sqrt{S_n})$$

یا

$$L=۲+\sqrt{L}$$

بنابراین

$$(L-۲)^۲=L, \qquad L^۲-۵L+۴=۰$$

پس $L=۱$ یا $L=۴$. از آنجا که به ازای $n\geqslant ۲$، داریم $S_n\geqslant ۳$، لذا حد نمی‌تواند برابر ۱ باشد، پس $L=۴$.

۱احتیاط. برای تضمین همگرایی، یکنوایی تنها یا کراندار بودن تنها کافی نیست. همان طورکه قبلاً دیدیم، دنبالهٔ $S_n=(-۱)^n$ کراندار است، ولی همگرا نیست. مثال بعدی، دنبالهٔ یکنوایی را عرضه می‌کند که واگراست.

مثال ۴. فرض کنید $S_n=۱+۱/۲+۱/۳+\cdots+۱/n$. دراین صورت

$$S_{n+۱}=S_n+۱/(n+۱)>S_n$$

پس این دنباله، یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی است. اما

$$S_۱=۱,\ S_۲=\frac{۳}{۲},\ S_۴=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>۱+\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\right)=۲$$

$$S_۸>۱+\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}\right)=\frac{۵}{۲}$$

و به طورکلی، اگر n توانی از ۲ باشد، مثلاً $n=۲^m$، آنگاه کسرهایی که باید جمع شوند تا S_n به‌دست آید را می‌توان به‌صورت زیر گروه‌بندی کرد

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)>\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{۲}$$

$$\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}\right)>\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}\right)=\frac{۱}{۲}$$

← آنگاه T_n هم یك دنبالهٔ کراندار یکنوای افزایشی خواهد بود، لذا به یك حدی، مثلاً L'، همگراست. سپس، بــه دلیل اینکه $T_n>۰$، داریــم $L'\geqslant ۰$؛ و چون T_n . $S_n=T_n$، لــذا $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=L=(\lim\limits_{n\to\infty} T_n)^۲=(L')^۲$؛ بنابراین $L'=\sqrt{L}$.

$$\left(\frac{۱}{۲^{m-۱}+۱}+\frac{۱}{۲^{m-۱}+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^m}\right)>\underbrace{\left(\frac{۱}{۲^m}+\frac{۱}{۲^m}+\cdots+\frac{۱}{۲^m}\right)}_{۲^{m-۱}\ \text{جمله}}=\frac{۱}{۲}$$

ازجمع طرفین نامساوی، نتیجه می‌شود

اگر $n=۲^m$، آنگاه $\qquad S_n>\left(۱+\frac{m}{۲}\right)$

بنابراین دنبالهٔ $\{S_n\}$ کراندار نیست، و در نتیجه همگرا نیست. (به‌قضیهٔ ۲ رجوع کنید.)

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه گاهی می‌توان حد دنباله‌ای را با به کار بردن نامساویها به‌دست آورد.

مثال ۵. حد $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ را به‌دست آورید!

حل. فرض‌کنید $S_n=\sqrt[n]{n}=(n)^{۱/n}$. دراین صورت

$$S_۱=۱,\ S_۲=\sqrt{۲}\approx ۱٫۴۱۴,\ S_۳=\sqrt[۳]{۳}\approx ۱٫۴۴۲,$$

$$S_۴=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}\approx ۱٫۴۱۴,\ \ldots$$

دنباله یکنوا نیست و در عین حال شواهد زیادی در مورد چگونگی ارتباط عناصرمتوالی دنباله در دست نداریم. اما می‌توانیم آزمایش‌خود را ادامه دهیم. برای

$$n=۸,\qquad S_n=(۸)^{۱/۸}=(\sqrt{۸})^{۱/۴}\approx(۲٫۸۲۸)^{۱/۴}=(\sqrt{۲٫۸۲۸})^{۱/۲}$$
$$\approx(۱٫۶۸)^{۱/۲}=\sqrt{۱٫۶۸}\approx ۱٫۳;$$

$$n=۱۶,\qquad S_n=(۱۶)^{۱/۱۶}=(\sqrt{۱۶})^{۱/۸}=(۴)^{۱/۸}=(\sqrt{۴})^{۱/۴}=(۲)^{۱/۴}$$
$$=(\sqrt{۲})^{۱/۲}\approx(۱٫۴۱۴)^{۱/۲}\approx ۱٫۲$$

از اینجا آشکار می‌شود که اگر n توانی از ۲ باشد، آنگاه محاسبهٔ S_n شامل تعدادی عمل جذرگیری است که حاصل آنها عددی است که چندان از ۱ بزرگتر نیست. فرض‌کنید h برابر با $S_n-۱$ است. در این صورت

(۹.۴ الف) $\qquad S_n=۱+h=\sqrt[n]{n}$

بنابراین

(۹.۴ ب) $\qquad (۱+h)^n=n$

با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای و به‌ازای هر $n\geqslant ۲$ داریم

$$n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n$$
$$\geqslant\frac{n(n-1)h^2}{2}$$

بنابراین

$$h^2\leqslant\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}$$

و

$$|h|\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}\qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant 2 \tag{10.4}$$

اگر $n>1$، آنگاه $\sqrt[n]{n}$ نیز بزرگتر از ۱ خواهد بود، پس $h=\sqrt[n]{n}-1$ مثبت است، و با درنظر گرفتن رابطهٔ (۱۰.۴) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$0\leqslant h=\sqrt[n]{n}-1\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}\qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant 2$$

اکنون h را از بحث حذف کرده، و توجه خود را معطوف

$$0\leqslant\sqrt[n]{n}-1\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}\qquad \text{به‌ازای هر } n\geqslant 2 \tag{11.4}$$

می‌کنیم. جملهٔ سمت چپ نامساوی (۱۱.۴) مقدار ثابت ۰ و عبارت سمت راست آن با افزایش بدون کران n، به ۰ میل می‌کند. بنابراین، منطقی به‌نظر می‌رسد اگر نتیجه بگیریم که جملهٔ میانی، $\sqrt[n]{n}-1$، نیز هنگامی که $n\to\infty$، به ۰ میل خواهد کرد. به عبارت دیگر، ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \tag{12.4}$$

زیرا فرض کنید $\varepsilon>0$. دراین صورت، از (۱۱.۴)، نتیجه می‌شود که

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

و $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|$ کوچکتر از ε خواهد بود اگر

$$\frac{2}{n-1}<\varepsilon^2 \quad \text{یا} \quad n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$$

فرض کنید N یك عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۲ وهم چنین بزرگتر از $(۲/\varepsilon^۲)+۱$ است. در این صورت

$$\left|\sqrt[n]{n}-۱\right|<\varepsilon \qquad \text{اگر } n\geqslant N\text{، آنگاه}$$

در نتیجه رابطهٔ (۱۲.۴) برقرار است.

مثال قبل، قضیهٔ کلی زیر را پیشنهاد می‌کند.

قضیهٔ ۶. فرض کنید دنباله‌های $\{S_n\}$، $\{T_n\}$، و $\{U_n\}$ چنان باشندکه، به‌ازای عدد صحیح و مثبت $N_۰$، داشته باشیم

$$S_n\leqslant T_n\leqslant U_n \qquad \text{اگر } n\geqslant N_۰\text{، آنگاه} \qquad (۱۳.۴)$$

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} U_n=L$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=L$.

اثبات. طبق فرض، اگر $\varepsilon>۰$ باشد، یك عدد صحیح $N_۱$ وجود دارد به‌طوری که

$$|S_n-L|<\varepsilon \qquad \text{اگر } n\geqslant N_۱\text{، آنگاه}$$

و یك عدد صحیح $N_۲$ وجود دارد به‌طوری که

$$|U_n-L|<\varepsilon \qquad \text{اگر } n\geqslant N_۲\text{، آنگاه}$$

فرض کنید N برابر ماکزیمم سه عدد $N_۰$، $N_۱$، و $N_۲$ است، در این صورت، اگر $n\geqslant N$، آنگاه

$$L-\varepsilon<S_n\leqslant T_n\leqslant U_n<L+\varepsilon$$

بنا بر این

$$L-\varepsilon<T_n<L+\varepsilon$$

و

$$|T_n-L|<\varepsilon \qquad \text{اگر } n\geqslant N\text{، آنگاه}$$

تمرینها

۱. قضیهٔ ۵ را برای دنباله‌های یکنوای کاهشی کراندار ثابت کنید.

۲. فرض کنید

$$S_n=۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۴!}+\cdots+\frac{۱}{[۲(n-۱)]!}$$

ثابت کنید که $\{S_n\}$ همگراست.

۳. فرض کنید

$$S_n=\frac{۱}{۱\cdot ۲}+\frac{۱}{۲\cdot ۳}+\frac{۱}{۳\cdot ۴}+\cdots+\frac{۱}{n\cdot(n+۱)}$$

نشان دهید که S_n به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$S_n=\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)$$

سپس ثابت کنید که $\{S_n\}$ همگراست. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ را به‌دست آورید.

۴. فرض کنید

$$T_n=\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{(n+۱)^۲}$$

T_n را با S_n تمرین ۳ مقایسه کنید. آیا می‌توانید ثابت کنید که $\{T_n\}$ همگراست؟

۵. قضیهٔ زیر را ثابت کنید: اگر $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ دو دنبالهٔ یکنوای افزایشی باشند به‌طوری که، به‌ازای هر عدد صحیح ومثبت n، داشته باشیم $T_n\leqslant S_n$، و اگر $\{S_n\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{T_n\}$ هم همگراست.

۶. قضیه‌ای مانند تمرین ۵ برای دنباله‌های یکنوای کاهشی بیان و اثبات کنید.

۷. اگر $۲-(۳/n)<S_n<۲+(۵/n)$ باشد، آیا دنبالهٔ $\{S_n\}$ همگراست؟ اگر همگراست، حد آن چیست؟

۸. (الف) ثابت کنید که

$$\frac{n}{n+۱}<\frac{n+۱}{n+۲}\qquad n\geqslant ۱$$

(ب) اگر

$$\frac{n}{n+۱}<S_n<\frac{n+۱}{n+۲}$$

ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=۱$.

۹. ثابت کنید: اگر $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ همگرا باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، داشته باشیم $S_n\geqslant ۰$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{S_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}$.

راهنمایی: فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=L$. دوحالت زیر را درنظر بگیرید: (۱) $L=۰$، (۲) $L>۰$. درحالت دوم، از

$$\sqrt{S_n}-\sqrt{L}=(S_n-L)/(\sqrt{S_n}+\sqrt{L})$$

استفاده کنید!

۵. حد توابعی که دنباله نیستند

مثال ۱. اگر x یك عدد حقیقی خیلی نزدیك به‌عدد ۳ باشد، آنگاه $۲x-۵$ تقریباً با ۱ برابر خواهد بود. در واقع، این اختلاف را به‌طریق زیر می‌توان اندازه گرفت

$$|(۲x-۵)-۱|=|۲x-۶|=۲|x-۳|$$

بنابراین، اگر حریفی از ما بخواهد که اختلاف بین $۲x-۵$ و ۱ را از مقدار یك ε از پیش داده شدهٔ مثبت کمتر کنیم، می‌توانیم این کار را انجام دهیم مشروط بر اینکه اختلاف x و ۳ از $\varepsilon/۲$ کمتر باشد:

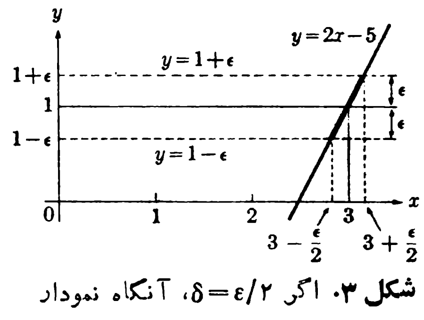
اگر $|x-۳|<\varepsilon/۲$، آنگاه $|(۲x-۵)-۱|=۲|x-۳|<\varepsilon$

این مطلب را به‌طریق دیگری نیز می‌توان بیان کرد: به‌هر عدد مثبت ε یك عدد مثبت $\delta=\varepsilon/۲$ (دلتای یونانی) مربوط می‌شود به طوری که $۲x-۵$ در داخل فاصله‌ای به طول ε از ۱ قرار بگیرد وقتی که x در داخل فاصله‌ای به‌طول δ از ۳ قرار می‌گیرد. این مطلب به‌صورت نموداری در شکل ۳ نمایانده شده است.

مثال ۲. به عنوان مثال دیگر، فرض کنید x خیلی به ۲ نزدیك بوده ولی از آن متمایز است. آیا عدد Lی وجود دارد به‌طوری که $(۵x^۲-۲۰)/(x-۲)$ خیلی به L نزدیك باشد؟ برای پاسخ به‌این پرسش، عبارت بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم

اگر $x\neq ۲$، آنگاه $\dfrac{۵x^۲-۲۰}{x-۲}=\dfrac{۵(x^۲-۴)}{x-۲}=۵(x+۲)=۵x+۱۰$

اکنون دیده می‌شود که به‌ازای هر $x\neq۲$، عبارت داده شده دارای مقدار $۵x+۱۰$ است،



شکل ۳. اگر $\delta=\varepsilon/۲$، آنگاه نمودار $y=۲x-۵$ بین دو خط $y=۱-\varepsilon$ و $y=۱+\varepsilon$ واقع می‌شود هرگاه x بین $۳-\delta$ و $۳+\delta$ قرار گیرد.

و بنابراین هنگامی که x به ۲ نزدیک می‌شود، $۵x+۱۰$ به $L=۲۰$ خیلی نزدیک خواهد شد. فرض کنید حریفی باز با یک عدد مثبت εای به سراغ ما بیاید و از ما بخواهد که یک عدد مثبت δ به‌دست آوریم به‌طوری که

اگر $x\neq ۲$ و $|x-۲|<\delta$، آنگاه $\left|\dfrac{۵x^{۲}-۲۰}{x-۲}-۲۰\right|<\varepsilon$

چون به‌ازای $x\neq ۲$، $[(۵x^{۲}-۲۰)/(x-۲)]=۵x+۱۰$، لذا

$$|(۵x+۱۰)-۲۰|=|۵x-۱۰|=۵|x-۲|<\varepsilon$$

و این نامساوی برقرار است اگر

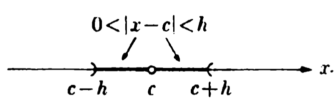
$$|x-۲|<\varepsilon/۵$$

بنابراین برای این مثال کافی است δ را مساوی $\varepsilon/۵$ فرض کنیم و بدین‌ترتیب عدد مثبتی در دست داریم که جوابگوی مدعی است.

در مثال اول، تابع $f(x)=۲x+۵$ به‌ازای جمیع مقادیر x به استثنای $x=۳$ تعریف شده است. در مثال دوم $f(x)=(۵x^{۲}-۲۰)/(x-۲)$ برای جمیع مقادیر x به‌استثنای $x=۲$ تعریف شده‌است. به‌طور کلی، اگر تابع $f(x)$ را به‌ازای جمیع مقادیر x نزدیک به‌یک عدد c مورد مطالعه قرار دهیم، می‌گوییم تابع f دریک همسایگی محذوف c (که اینک تعریفش می‌کنیم) تعریف می‌شود.

همسایگی محذوف. یک همسایگی عدد حقیقی c فاصله‌ای از اعداد حقیقی x است که به ازای یک $h>0$، در نامساوی $|x-c|<h$ صدق می‌کند. یک همسایگی محذوف c یک همسایگی c است که در آن c حذف شده است. به‌عبارت دیگر، یک همسایگی محذوف نقطهٔ c، متشکل از تمامی نقاط $x\neq c$ است به طوری که، به‌ازای هر عدد مثبت h، داشته باشیم $0<|x-c|<h$؛ یا تمامی x هایی که به ازای یک h مثبت داشته باشیم، $0<|x-c|<h$. (شکل۴)

بنابراین، بعضی ازهمسایگیهای ۳ عبارتند از: $۲<x<۴$، یا $۲٫۹<x<۳٫۱$؛ و بعضی از همسایگیهای محذوف ۲ عبارتند از: اجتماع فاصله‌های $۱<x<۲$ و $۲<x<۳$، یا اجتماع فاصله‌های $۱٫۸<x<۲$ و $۲<x<۲٫۲$. همسایگی اول از این دو همسایگی محذوف ۲ می‌تواند به صورت تمامی x هایی که در شرط



شکل۴. همسایگی محذوف $0<|x-c|<h$ از اجتماع در فاصلهٔ $c-x<x<c$ و $c<x<c+h$ تشکیل یافته است.

$1 > |x-2| > 0$ صدق می‌کنند، نمایش داده شود، و همسایگی دوم به صورت $0.2 > |x-2| > 0$ بیان می‌شود.

تعریف حد یك تابع. فرض کنید تابع $f(x)$ به ازای تمامی x های متعلق به همسایگی محذوف c، یعنی $h > |x-c| > 0$، تعریف شده است. اگرعددی مانند L وجود داشته باشد به‌طوری که به‌هرعدد مثبت ε، یك عدد مثبت δ مربوط شود به‌طوری که

$$|f(x)-L| < \varepsilon \qquad \text{آنگاه}\ ،\ 0 < |x-c| < \delta \ \text{اگر} \qquad (1.5)$$

می‌گوییم تابع $f(x)$ وقتی که x به c نزدیك می‌شود به L همگراست و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

بنابراین

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^2-20}{x-2} = 20 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 3} (2x-5) = 1$$

مثال ۴. حد $f(x) = x^2$ را، وقتی که x به ۴ نزدیك می‌شود به‌دست آورید.

حل. به طور طبیعی حدس می‌زنیم که جواب $L = 16$، زیرا اگر x به ۴ نزدیك شود، x^2 باید نزدیك به ۱۶ باشد. آیا می‌توانیم آن را اثبات کنیم؟ فرض کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم نامساوی زیر را برقرار کنیم

$$|x^2-16| < \varepsilon$$

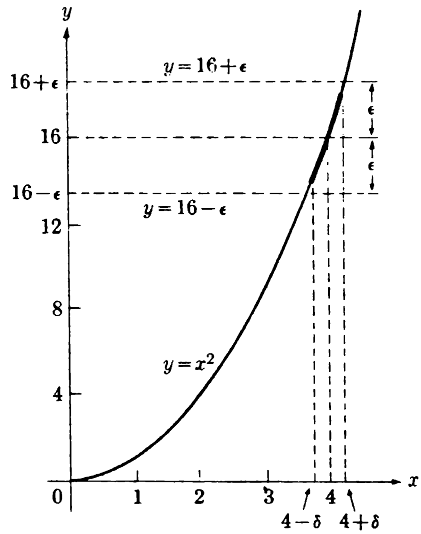
یا

$$|x+4| \cdot |x-4| < \varepsilon$$

دراینجا وسوسه می‌شویم که δ را برابر $\varepsilon/|x+4|$ بگیریم ولی نمی‌دانیم x معرف چه عددی است، بنابراین، این عبارت δ را تعیین نمی‌کند. آیا ثابتی مانند K وجود دارد که به‌جای $|x+4|$ به‌کار بریم؟ البته $|x+4|$ به‌ازای جمیع مقادیر x متعلق به‌یك همسایگی محذوف ۴ برابر با K نیست، امـا شاید بتوان وقتی x نزدیك به ۴ است، کرانی برای $|x+4|$ به‌دست آورد. باز شاید بخواهیم عدد ۸ را به‌جای چنین کرانی بگیریم ولی در این صورت x نمی‌تواند از ۴ بزرگتر شود. بـا همهٔ اینها، اگـر x مثلاً به همسایگی محـذوف $1/2 > |x-4| > 0$ مـحـدود شـود، آنگـاه $4.5 > x > 3.5$ و $8.5 > x+4 > 7.5$، بنابراین به‌ازای تمامی چنین xهایی، داریم $|x+4| < 8.5$. اکنون δ را کوچکتر از $1/2$ وکوچکتر از $\varepsilon/8.5$ فرض می‌کنیم. در این صورت اگر $0 < |x-4| < \delta$، آنگاه

$$|x^2-16| = |x+4| \cdot |x-4| < (8.5)|x-4| \cdot \varepsilon$$

(به‌شکل ۵ مراجعه کنید.)



شکل ۵. اگر $\delta=\varepsilon/8.5$ و $0<|x-4|<\delta$ باشد، آنگاه نمودار $y=x^2$ بین $y=16-\varepsilon$ و $y=16+\varepsilon$ واقع می‌شود. (در اینجا فرض می‌شود که $\varepsilon/8.5 \leqslant 0.5$. درغیراین صورت δ را برابر ۵ر۰ بگیرید.)

توضیح ۱. اگردوقضیهٔ زیررا دراختیار داشتیم می‌توانستیم مثال۳ را آسانترحل کنیم

$$\lim_{x\to c} x = c \qquad (1)$$

و

(۲) اگر $\lim_{x\to c} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to c} g(x)=L_2$، آنگاه

$$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L_1L_2 = [\lim_{x\to c} f(x)]\cdot[\lim_{x\to c} g(x)]$$

زیرا، اگراین دوقضیه در دست باشند، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to 4} x^2 = \lim_{x\to 4}(x\cdot x) = [\lim_{x\to 4} x]\cdot[\lim_{x\to 4} x] = 4\times 4 = 16$$

حال توجه خودرا به‌این قضایا معطوف می‌سازیم، بعضی ازآنها را اثبات می‌کنیم و اثبات بعضی دیگررا به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. توجه‌کنیدکه این اثباتها خیلی شبیه قضایایی با همین مضمون دربارهٔ دنباله‌هاست، منتها Nها باید با δها جایگزین شوند.

قضیهٔ ۷. $\lim\limits_{x \to c} x = c$.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > 0$. در این صورت اگر $0 < |x-c| < \delta$، آنگاه $|x-c| < \varepsilon$ مشروط بر اینکه $\delta = \varepsilon$. پس، به‌هر $\varepsilon > 0$، یك $\delta > 0$ $(\delta = \varepsilon)$ نسبت داده می‌شود به‌طوری که شرایط (۱.۵) در تعریف حد برای $f(x) = x$ و $L = c$ براورده می‌گردد.

قضیهٔ ۸. اگر $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ باشد، آنگاه $|f(x)|$ در یك همسایگی محذوف c کراندار است.

اثبات. چون $1 > 0$، می‌توانیم در تعریف حد ε را مساوی ۱ قرار دهیم و نتیجه بگیریم که یك عدد مثبت δ وجود دارد به‌طوری که اگر $0 < |x-c| < \delta$، آنگاه $|f(x)-L| < 1$. این بدان معناست که

(۲.۵) اگر $0 < |x-c| < \delta$، آنگاه $|f(x)| < |L| + 1$

بنابراین $|f(x)|$ دراین همسایگی محذوف c کراندار است.

مثال ۴. به‌ازای $x \neq 2$، مانندمثال۲، فرض کنید $f(x) = (5x^2 - 20)/(x-2)$. درمثال ۲ به‌دست آوردیم که $L = 20$، $\delta = \varepsilon/5$، بنابراین به‌ازای $\varepsilon = 1$ و $\delta = 1/5$، می‌توانیم بگوییم

اگر $0 < |x-2| < \frac{1}{5}$، آنگاه $\left|\dfrac{5x^2-20}{x-2}\right| < 21$

به‌عنوان یك بررسی، با یك محاسبهٔ مستقیم نتیجه می‌گیریم که برای $x \neq 2$، داریم

$$\frac{5x^2-20}{x-2} = 5x + 10 < 21 \quad \text{یا} \quad 5x < 11 \quad \text{یا} \quad x < 2{,}2$$

قضیهٔ ۹. اگر $\lim f(x) = L_1$ و $\lim g(x) = L_2$، آنگاه

(الف)
$$\lim [f(x) \pm g(x)] = [\lim f(x)] \pm [\lim g(x)] = L_1 \pm L_2$$

(ب) $\lim kf(x) = k \lim f(x) = kL_1$

(پ) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = [\lim f(x)] \cdot [\lim g(x)] = L_1 L_2$

و

(ت) اگر $L_2 \neq 0$: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

در تمامی این حدها $x \to c$.

۱اثبات. اثبات تمامی اینها را به‌استثنای (پ) حذف می‌کنیم زیرا اغلب این اثباتها تکرار اثباتهای قضایای مشابه درمورد حد دنباله‌ها با اندکی تغییراست. برای نمایش این تغییرات اندك، اثبات (پ) را عرضه می‌کنیم.

فرض‌کنید $\varepsilon > 0$. می‌خواهیم نشان دهیم که یك عدد مثبت δ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0 < |x-c| < \delta$، آنگاه $|f(x)g(x)-L_1L_2| < \varepsilon$.

داریم

$$f(x)g(x)-L_1L_2 = f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2$$

و

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-L_1L_2| &= |(f(x)g(x)-L_1g(x))+(L_1g(x)-L_1L_2)|\\ &\leqslant |f(x)g(x)-L_1g(x)|+|L_1g(x)-L_1L_2|\\ &\leqslant |f(x)-L_1|\cdot|g(x)|+|L_1|\cdot|g(x)-L_2|\end{aligned}$$

بنا به‌فرض، $\lim g(x)=L_2$، پس برطبق قضیهٔ ۲، در یك همسایگی محذوف c داریم

$$|g(x)| < 1+|L_2| = B$$

فرض کنید این همسایگی محذوف عبارت است از $0 < |x-c| < \delta_1$. چون $\lim f(x)=L_1$؛ پس برای عدد مثبت داده شده‌ای مانند $\varepsilon/(2B)$، یك عدد مثبت δ_2 وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0 < |x-c| < \delta_2$، آنگاه $|f(x)-L_1| < \varepsilon/(2B)$

مشابهاً، یك عدد مثبت δ_3 وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $0 < |x-c| < \delta_3$، آنگاه $|g(x)-L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2|L_1|+1}$

حال فرض‌کنید δ مینیمم δ_1، δ_2، و δ_3 است. دراین‌صورت اگر $0 < |x-c| < \delta$، آنگاه

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-L_1L_2| &\leqslant |f(x)-L_1|\cdot|g(x)|+|L_1|\cdot|g(x)-L_2|\\ &< \frac{\varepsilon}{2B}\cdot B+|L_1|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L_1|+1} < \varepsilon\end{aligned}$$

نتیجهٔ ۱۰۹ اگر $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ یك چند جمله‌ای و c یك عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

اثبات. با به‌کار بردن قضایای ۷ و ۹ (پ) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to c} x^{۲}=(\lim_{x\to c} x)\cdot(\lim_{x\to c} x)=c^{۲}$$

و اگر $\lim_{x\to c} x^{n-۱}=c^{n-۱}$، آنگاه

$$\lim_{x\to c} x^{n}=(\lim_{x\to c} x^{n-۱})\cdot(\lim_{x\to c} x)=c^{n-۱}\cdot c=c^{n}$$

بنابراین، بـا استقرا روی n؛ داریـم $\lim_{x\to c} x^{n}=c^{n}$. مشابهـاً، بـرمبنای قضیهٔ ۹ (ب) $\lim_{x\to c} a_k x^k=a_k c^k$، و

$$\lim_{x\to c}(a_{۰}+a_{۱}x+\cdots+a_n x^n)=\lim_{x\to c} a_{۰}+\lim_{x\to c} a_{۱}x+\cdots+\lim_{x\to c} a_n x^n$$

$$=a_{۰}+a_{۱}c+\cdots+a_n c^n$$

$$=f(c)$$

مثال ۵. $\lim_{x\to ۲}(x^{۲}+۵x-۶)=۴+۱۰-۶=۸$.

نتیجهٔ ۲.۹ اگر

$$f(x)=a_{۰}+a_{۱}x+\cdots+a_n x^n \quad \text{و} \quad g(x)=b_{۰}+b_{۱}x+\cdots+b_m x^m$$

و $g(c)\neq ۰$، آنگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}$$

اثبات. قضیهٔ ۹ (ت) ونتیجهٔ (۱.۹) را به‌کار می‌بریم.

مثال ۶

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۸}{x^{۲}-۵x+۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{(x-۲)(x-۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۲x+۴}{x-۳}=\frac{۴+۴+۴}{۲-۳}$$

$$=-۱۲$$

پیوستگی. تابع f درنقطهٔ $x=c$ واقع در دامنهٔ تعریف آن پیوسته نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. بنابراین تابع بـاید در نقطهٔ c دارای مقدار معین $f(c)$ بوده و به‌ازای تمامی مقادیر x نزدیك به c، $f(x)$ نیز باید نزدیك به $f(c)$ باشد.

نتیجهٔ ۱.۹ می‌گوید که یك چندجمله‌ای در هر نقطهٔ c پیوسته است، و نتیجهٔ ۲.۹ می‌گوید که یك تابع کسری $f(x)/g(x)$ وقتی‌که مخرج آن غیرصفرباشد، پیوسته است. ازطرف دیگرتابعی‌که به‌صورت زیرتعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases}-1 & : x<0\\ 0 & : x=0\\ +1 & : x>0\end{cases}$$

درنقطهٔ $x=0$ ناپیوسته است اگرچه در بقیهٔ نقاط پیوسته است.

قضیهٔ ۱۰. اگر به‌ازای تمامی xهایی که در همسایگی محذوف c قرار دارند، داشته باشیم $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ و

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} h(x)=L$$

آنگاه

$$\lim_{x\to c} g(x)=L$$

اثبات. فرض‌کنید $\varepsilon>0$. بنا به‌فرض قضیه، فرض می‌کنیم سه عدد مثبت δ_0، δ_1، و δ_2 وجود دارند به‌طوری‌که

(الف) اگر $0<|x-c|<\delta_0$، آنگاه $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$

(ب) اگر $0<|x-c|<\delta_1$، آنگاه $|f(x)-L|<\varepsilon$

(پ) اگر $0<|x-c|<\delta_2$، آنگاه $|h(x)-L|<\varepsilon$

فرض‌کنید δ برابر مینیمم سه عدد δ_0، δ_1، و δ_2 باشد. دراین صورت

اگر $0<|x-c|<\delta$، آنگاه $L-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<L+\varepsilon$

بنابراین

اگر $0<|x-c|<\delta$، آنگاه $|g(x)-L|<\varepsilon$

مثال ۷. به‌عنوان یك کاربرد قضیه ۱۰، ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0 \qquad (\text{۳.۵ الف})$$

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1 \qquad (\text{۳.۵ ب})$$

و

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (\text{۳.۵ پ})$$

در ایـن فرمولها θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. (به خاطر بیاورید کـه اندازهٔ رادیانی یك زاویه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\theta = s/r \tag{۴.۵}$$

که درآن s طول کمانی است که زاویهٔ مورد نظر روی دایره‌ای به شعاع r، جدا می‌کند. مرکز این دایره و رأس زاویه یکی هستند. شکل ۶ الف این تعریف را روشن می‌سازد.) در شکل ۶ ب، O مرکز یك دایرهٔ واحد است، θ اندازهٔ رادیانی زاویهٔ حادهٔ AOP، و $\triangle APQ$ یك مثلث قائم‌الزاویه با دو ضلع جانبی به‌طولهای

$$QP = \sin\theta, \qquad AQ = ۱ - \cos\theta$$

است. ازقضیهٔ فیثاغورث، و این امرکه $\theta < AP$، استفاده‌کرده و به‌دست می‌آوریم

$$\sin^{۲}\theta + (۱-\cos\theta)^{۲} = (AP)^{۲} < \theta^{۲} \tag{۵.۵}$$

چون هردو جمله درطرف چپ نامساوی (۵.۵) مثبت‌اند، لذا هرکدام‌کوچکتراز مجموع آنها بوده و بنابراین‌کوچکتراز $\theta^{۲}$ می‌باشند

$$\sin^{۲}\theta < \theta^{۲} \tag{۶.۵ الف}$$

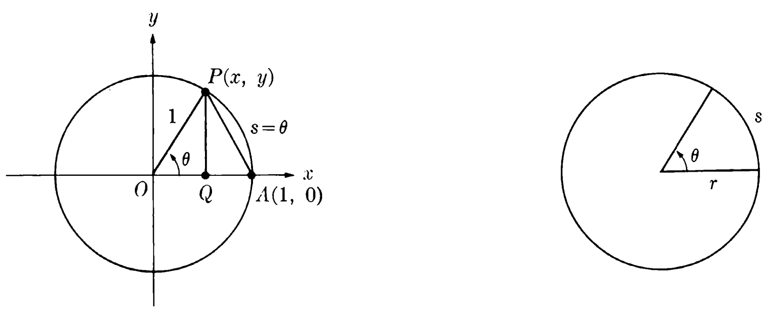
$$(۱-\cos\theta)^{۲} < \theta^{۲} \tag{۶.۵ ب}$$

نامساویهای (۶.۵ الف) و (۶.۵ ب) هم‌چنین دلالت براین دارندکه

$$|\sin\theta| < |\theta| \tag{۷.۵ الف}$$

$$|۱-\cos\theta| < |\theta| \tag{۷.۵ ب}$$

اگـر ε یك عدد مثبت بـاشد می‌توانیم δ را مساوی ε گرفته و نتیجه بگیریم کـه اگر $۰ < |\theta| < \delta$، آنگاه



(ب) روی یك دایرهٔ واحد
$r = ۱,\ s = \theta$

(الف) اندازهٔ رادیانی؛
$\theta = s/r;\ s = r\theta$

شکل ۶

$$|\sin\theta-0|<\varepsilon$$

و

$$|1-\cos\theta|<\varepsilon$$

بنابراین

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$$

و

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$

برای نشان دادن معادلهٔ (۳.۵ پ)، فرض کنید که θ مثبت بوده و کمتر از $\pi/2$ باشد (شکل ۷). مساحتهای $\triangle AOP$، قطاع AOP، و $\triangle AOT$ را مقایسه می‌کنیم. نسبت مساحت قطاع AOP به مساحت کل دایرهٔ به‌شعاع واحد، با نسبت کمان آن قطاع به‌کل محیط دایره برابر است

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AOP}{\text{مساحت دایره}}=\frac{\text{arc } AP}{\text{محیط دایره}}$$

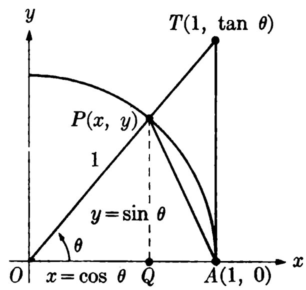
بنابراین

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AOP}{\pi r^2}=\frac{r\theta}{2\pi r}=\frac{\theta}{2\pi}$$

بنابراین

$$\text{مساحت قطاع } AOP=\frac{1}{2}r^2\theta \qquad (\text{۸.۵ الف})$$

$$=\frac{1}{2}\theta \qquad (r=1 \text{ چون}) \qquad (\text{۸.۵ ب})$$



شکل ۷. مساحت $\triangle AOP$ کوچکتر از مساحت قطاع AOP و این نیز کوچکتر از مساحت $\triangle AOT$ است.

ارتفاع $\triangle AOP$ با قاعدهٔ $OA=1$، عبارت است از

$$y=QP=\sin\theta$$

بنابراین

(۹.۵ الف) $$\triangle AOP \text{ مساحت} = \frac{1}{2}\sin\theta$$

ارتفاع $\triangle AOT$، با قاعدهٔ $OA=1$، عبارت است از $AT=\tan\theta$، بنابراین

(۹.۵ ب) $$\triangle AOT \text{ مساحت} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

اما

$$\triangle AOP \text{ مساحت} < AOP \text{ مساحت قطاع} < \triangle AOT \text{ مساحت}$$

بنابراین

(۱۰.۵) اگر $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، آنگاه $$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$$

اگر طرفین نامساوی (۱۰.۵) را بر $(1/2)\sin\theta$ تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

(۱۱.۵ الف) اگر $0<\theta<\frac{\pi}{2}$، آنگاه $$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

به یـاد بیاورید کـه $\sin(-\theta)=-\sin\theta$، و $\cos(-\theta)=\cos\theta$، بنابــراین از (۱۱.۵ الف) نتیجه می‌شود که

(۱۱.۵ ب) اگر $0<-\theta<\frac{\pi}{2}$، آنگاه $$1<\frac{-\theta}{\sin(-\theta)}<\frac{1}{\cos(-\theta)}$$

یا

اگر $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$، آنگاه $$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

از (۱۱.۵ الف) و (۱۱.۵ ب) نتیجه می‌شود که

(۱۲.۵) اگر $0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$، آنگاه $$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

نامساوی (۱۲.۵) اطلاعی دربارهٔ $\theta/(\sin\theta)$ به‌دست می‌دهد. این اطلاع را می‌توانیم با معکوس کردن ودر نتیجه عوض کردن جهت علایم نامساوی به اطلاعی دربارهٔ $(\sin\theta)/\theta$ برگردانیم، زیرا

اگر a و b مثبت باشند و $a > b$، آنگاه $(۱/a) < (۱/b)$

بنابراین

اگر $۰ < |\theta| < \frac{\pi}{۲}$، آنگاه $۱ > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$

حال قضیهٔ ۱۰ را به‌کار می‌بریم

$$\lim_{\theta \to ۰} ۱ = ۱, \qquad \lim_{\theta \to ۰} \cos\theta = ۱$$

بنابراین

$$\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

مثال ۸.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin ۳x}{x} = \lim_{۳x \to ۰} \frac{۳\sin ۳x}{۳x}$$

$$= ۳ \lim_{\theta \to ۰} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = ۳$$

مثال ۹.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to ۰} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{۱}{\cos x}\right)$$

$$= \left[\lim_{x \to ۰} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\right] \cdot \left[\lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{\cos x}\right)\right]$$

$$= ۱ \cdot ۱ = ۱$$

مثال ۱۰.

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\frac{۱}{x} = \lim_{y \to ۰} \frac{\sin y}{y} \quad \left(y = \frac{۱}{x}\right)$$

$$= ۱$$

درمثال۱۰، باید تفسیری ازحد یك تابع وقتی که x به ∞ میل می‌کند، ارائه دهیم ($(f(x) = x\sin(۱/x)$). وقتی می‌گوییم حد ۱ است، منظور آن است که هرگاه x بزرگ باشد، $f(x)$ به ۱ نزدیك است. اما گفتن اینکه "هرگاه x بزرگ باشد" با این گفتارکه "هرگاه x به بینهایت نزدیك باشد" کاملاً متفاوت است، زیرا هراندازه هم x بزرگ باشد، هرگز به‌بینهایت نزدیك نخواهد بود. از تعریف حد دنباله استفاده می‌کنیم:

$\lim_{n \to \infty} S_n = L$ اگرو تنها اگر به‌هر $۰ < \varepsilon$ یك عدد صحیح N متناظرشود

به‌طوری‌که اگر $n \geqslant N$، آنگاه $|S_n - L| < \varepsilon$

تنها فرقی که تعریف فوق با $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ دارد آن است که در اینجا x به مجموعهٔ اعداد صحیح محدود نمی‌باشد، بنابراین می‌گوییم

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ اگر و تنها اگر به‌هر $\varepsilon > 0$ یك عدد M متناظرشود

به طوری‌که اگر $x \geqslant M$، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

قضایای مربوط بـه حد مجموع، حـاصلضرب، و خـارج قسمت توابع $f(x)$ و $g(x)$، (هرگاه $x \to \infty$)، مانند قضایای مشابه آنها در دنباله‌هاست وقتی‌که $n \to \infty$.

قضیهٔ ۱۱. اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to \infty} g(x) = L_2$، آنگاه

(الف) $\lim_{x \to \infty} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$

(ب) $\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = L_1 L_2$

(پ) به‌شرطی که $L_2 \neq 0$: $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = L_1/L_2$

اثبات این‌قضایا تقریباً با اثبات قضایای متناظر آنها در دنباله‌ها یکی است و به‌همین دلیل از اثبات آنها صرف‌نظر می‌کنیم.

یك راه دیگر برای پاسخ به‌مسائل حدی از نوع مثال بعدی، تغییر متغیر $y = 1/x$ است و در این صورت y به‌صفر میل می‌کند هرگاه x به ∞ میل کند.

مثال ۱۱.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 8}{5x^2 + 7x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - (2/x) + (8/x^2)}{5 + (7/x) + (1/x^2)}$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3 - 2y + 8y^2}{5 + 7y + y^2} \qquad \left(y = \frac{1}{x}\right)$$

تمرینها

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱. $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+2}$

۲. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+2}$

۳. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x^2+2}$

۴. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

۵. $\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸}$ ۶. $\lim_{x \to ۰} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸}$

۷. $\lim_{x \to ۰} \frac{\sin ۳x}{۵x}$ ۸. $\lim_{h \to ۰} \frac{\sin ۳h}{\sin ۵h}$

۹. $\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin^۲ \theta}{\theta}$ ۱۰. $\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin^۲ \theta}{\theta^۲}$

۱۱. $\lim_{\theta \to ۰} \frac{۱ - \cos \theta}{\theta^۲}$ [راهنمایی: در $۱ + \cos \theta$ ضرب و تقسیم کنید!]

۱۲. $\lim_{\theta \to ۰} \frac{۱ - \cos \theta}{\theta}$

۱۳. طرف چپ معادلهٔ (۵.۵) را بسط داده و ساده کنید و ثابت کنید که به ازای $۰ < \theta < \pi/۲$، داریم $(۱ - \cos \theta) < \theta^۲/۲$. آیا نامساوی $\theta^۲/۲ > (۱ - \cos \theta)$ به‌ازای $\theta = ۰$ برقرار است؟ به ازای $\theta = \pi/۲$ چطور؟ برای $۰ < |\theta| < \pi/۲$ چطور؟ به‌ازای تمام θهای مخالف صفر چطور؟

تعیین کنید کدام یک از حدهای زیر وجود دارند و در صورت وجود مقدار آنها را به‌دست آورید.

۱۴. $\lim_{x \to \infty} \frac{۲x + ۳}{۵x + ۷}$ ۱۵. $\lim_{z \to \infty} \frac{۴z^۳ + ۳z^۲ + ۲}{z^۴ + ۵z^۲ + ۱}$

۱۶. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ ۱۷. $\lim_{x \to \infty} (۱ - \cos x)$

۱۸. $\lim_{x \to \infty} \frac{۱ - \cos x}{x}$ ۱۹. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{۲ + ۳x}{۱ + ۵x}}$

۲۰. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{۲ + ۳x}{۱ - ۵x}}$ ۲۱. $\lim_{x \to \infty} x^x$

۲۲. $\lim_{x \to \infty} (x)^{۱/x}$ (سعی کنید جواب را حدس زده و سپس درمورد آن بحث کنید، حتی اگر نتوانید صحت آن را اثبات نمایید!)

۶. بخش پایانی

صفحات پیشین فقط مقدمه‌ای بر نظریهٔ حد است همراه با چند مثال، مانند $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}$

و $\lim\limits_{\theta \to ۰} (\sin\theta)/\theta$ و برای روشن کردن اینکه چگونه می‌توان قضایای مربوط به‌حد را در پاسخ به پرسشهای نسبتاً مشکل به کار برد. کارهای بیشتری نیز می‌تواند انجام گیرد. به ویژه، بـه آستانهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال رسیده‌ایم. مثالهای زیرین روشهایی از طرز استفادهٔ نظریهٔ حد را درحساب دیفرانسیل نشان می‌دهد.

مثال ۱. (شیب یك منحنی) شیب خـط مماس بـر منحنی $y=۱/x$ را در نقطهٔ $P(۲, ۱/۲)$ به‌دست آورید.

حل. درشکل ۸، نمودارقسمتی ازمنحنی نزدیك نقطهٔ P نشان داده شده است. نقطهٔ دیگری مـانند $Q(x, ۱/x)$ را در نزدیکی P در نظر بگیرید. خط PQ یك خط قاطع منحنی نامیده می‌شود. شیب این خط را با $m_{\sec}$ نشان می‌دهیم. درآن صورت

$$m_{\sec}=\frac{(۱/x)-(۱/۲)}{x-۲} \qquad (۱.۶)$$

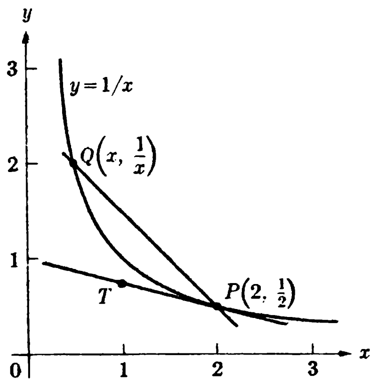
اگر نقطهٔ P را ثابت نگه‌داریم و Q را روی‌منحنی به‌سمتP وبا شرط $P\neq Q$ میل دهیم، آنگاه هر وضعیت Q یك خط قاطع، و درنتیجه یك شیب $m_{\sec}$ را معین می‌کند. اگرشیب خطوط قاطع، وقتی‌که Q به P میل می‌کند، به‌حدی میل‌کند، آن حد $m_{\tan}$ را شیب خط مماس برمنحنی در نقطهٔ P می‌نامیم. از معادلهٔ (۱.۶) نتیجه می‌شود

$$m_{\sec}=\frac{۲x}{۲x}\cdot\frac{(۱/x)-(۱/۲)}{x-۲}=\frac{۲-x}{۲x(x-۲)}=\frac{-۱}{۲x}$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ۹، داریم

$$m_{\tan}=\lim_{Q\to P}(m_{\sec})=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{-۱}{۲x}\right)=\frac{-۱}{۴}$$

بنابراین‌شیب خط مماس به‌منحنی $y=۱/x$ در $P(۲, ۱/۲)$، برابر $-۱/۴$ است.برای



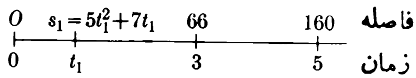
شکل ۸. قسمتی از نمودار منحنی $y=۱/x$.

ترسیم یك خط مماس بر منحنی در نقطهٔ P، می‌توانیم نقطهٔ $T(x_1, y_1)$ را بـا در دست داشتن $x_1 = 2 - 1$ و $y_1 = 1/2 + 1/4$ مشخص سازیم و PT را رسم کنیم.

مثال ۲. (شتاب یك جسم متحرك) فرض کنید یك جسم در راستای یك خط راست به طریقی حرکت می‌کند که s، مؤلفهٔ آن نسبت به یك نقطهٔ ثابت O روی خط مزبور، با معادلهٔ زیر بیان می‌شود

$$s = 5t^2 + 7t, \qquad t \geqslant 0 \tag{۲.۶}$$

در معادلهٔ (۲.۶)، t معرف زمان است که برحسب ثانیه اندازه گرفته می‌شود و s عبارت است از فـاصلهٔ جسم متحرك از نقطهٔ O در راستای خط حرکت کـه برحسب متر اندازه گرفته می‌شود. سرعت جسم متحرك در لحظهٔ $t = 5$ چه اندازه است؟ در لحظهٔ $t = 3$ چقدر است؟ به‌ازای $t = t_1$ سرعت چقدر است؟



شکل ۹. حرکت روی یك خط؛ $s = 5t^2 + 7t$.

حل. شکل ۹ مسیر حرکت و وضعیت متحرك را در زمانهای مختلف نشان می‌دهد.

(الف) حرکت را در نزدیکیهای $t = 5$ و $s = 160$ در نظر بگیرید. اگر t کمی بزرگتر از ۵ باشد فاصلهٔ s از نقطهٔ O کمی بیشتر از ۱۶۰ خواهد بود. سرعت متوسط این بخش از حرکت، عبارت است از

$$v_{\text{ave}} = \frac{s - 160}{t - 5} = \frac{5t^2 + 7t - 160}{t - 5} \tag{۳.۶}$$

این سرعت متوسط، خارج قسمت فاصلهٔ پیموده شده به زمان سپری شده، در طـول فاصلهٔ زمانی کوتاه از ۵ تا t است. اگر این سرعت متوسط وقتی کـه t به سمت ۵ میل می‌کند دارای حدی باشد، آن حد را سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 5$ می‌نامیم

$$(\text{سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ } t = 5) = \lim_{t \to 5} (v_{\text{ave}}) \tag{۴.۶}$$

صورت آخرین کسر در معادلهٔ (۳.۶) به‌دو عامل زیر تجزیه می‌شود

$$5t^2 + 7t - 160 = (t - 5)(5t + 32)$$

وقتی این عبارت به $(t - 5)$ تقسیم شود حاصل زیر به‌دست می‌آید

$$v_{\text{ave}} = 5t + 32 = (\text{سرعت متوسط از ۵ تا } t \neq 5)$$

و واضح است که این عبارت وقتی که t به ۵ میل می‌کند، دارای حد است. این حد را v می‌نامیم، و داریم

$$v=\lim_{t \to ۵} (۵t+۳۲)=۵۷$$

همین عملیات جبری برای مقادیر t کمتراز ۵ نیز به‌کار می‌رود، البته نخستین کسر موجود در معـادلۀ (۳.۶) را باید با عبارت $(t-۵)/(s-۱۶۰)$ جایگزین کرد، و اگر t از پایین به ۵ نزدیك شود نیز به همان حد خواهیم رسید. بنابراین سرعت لحظه‌ای درلحظۀ $t=۵$، ۵۷ متر در ثانیه خواهد بود.

(ب) حال، فرض‌کنید $t_۱$ یك عدد مثبت باشد. وضعیت متناظر به‌آن عبارت است از

$$s_۱=۵t_۱^۲+۷t_۱ \qquad (۵.۶)$$

فرض‌کنید t، لحظه‌ای نزدیك لحظۀ $t_۱$ است‌که مساوی $t_۱$ نیست. در این صورت سرعت متوسط متناظر به‌این قسمت حرکت عبارت است از

$$v_{\text{ave}}=\frac{s-s_۱}{t-t_۱}=\frac{(۵t^۲+۷t)-(۵t_۱^۲+۷t_۱)}{(t-t_۱)}=\frac{۵(t^۲-t_۱^۲)+۷(t-t_۱)}{(t-t_۱)}$$

$$=۵(t+t_۱)+۷ \quad : \quad t\neq t_۱$$

اکنون $t_۱$ را ثابت نگه‌داشته و t را به $t_۱$ (از هر دو سو) میل می‌دهیم. سرعت متوسط دارای حدی است، و این حد را سرعت لحظۀ $v_۱$ درلحظۀ $t_۱$ می‌نامیم

$$v_۱=\lim_{t \to t_۱} (۵(t+t_۱)+۷)=۱۰t_۱+۷$$

به‌وسیلۀ فرمول

$$v_۱=۱۰t_۱+۷ \qquad (۶.۶)$$

می‌توانیم سرعت را در هـرلحظه محاسبه کنیم. می‌توانیم جواب (الف) را با قرار دادن $t_۱=۵$ کنترل کرده و سرعت متناظر را برابر با ۵۷ به دست آوریم. وقتی که $t_۱=۳$ باشد، سرعت ۳۷ خواهد بود.

درحساب دیفرانسیل و انتگرال، فرامی گیریم که چگونه می‌توان،با استفاده ازقواعد مشتق‌گیری، مستقیماً معادلۀ سرعت را از معادلۀ حرکت به‌دست آورد. با کمك آن قواعد، مستقیماً از معادلۀ (۲.۶) به معادلۀ (۶.۶) می‌توان دست یافت. همـان قواعد در به دست آوردن شیب خط ممـاس به یك منحنی ازمعـادلۀ مربوطه به‌کار می‌روند. برای اطلاع و آ گاهی بیشتر از موارد استعمال مشتق، بـه یکی از کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه‌کنید.

مساحت. در مثال بعدی، می‌خواهیم بدانیم که آیا مجموع مربعات اولین n عـدد صحیح مثبت با فرمول زیر داده می‌شود

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \qquad (۷.۶)$$

به‌سادگی می‌توان دیدکه فرمول (۷.۶) برای هر n داده شده راست است. بنابراین برای ۳ ,۲ ,۱ = n به‌دست می‌آوریم

$$۱^۲=\frac{۱(۲)(۳)}{۶}=\frac{۶}{۶}=۱, \quad \text{یا} \quad ۱=۱$$

$$۱^۲+۲^۲=\frac{۲(۳)(۵)}{۶}=\frac{۳۰}{۶}=۵, \quad \text{یا} \quad ۵=۵$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲=\frac{۳(۴)(۷)}{۶}=\frac{۸۴}{۶}=۱۴, \quad \text{یا} \quad ۱۴=۱۴$$

که جملگی راستند. هر اندازه از این‌گونه بررسیها دربارهٔ صحت حالتهای خاص انجام گیرد، فرمول کلی را برقرار نمی‌سازد، ولـی روش استقرا ریاضی می‌تواند این‌کار را انجام دهد. قبلاً نشان داده‌ایم که معادلهٔ (۷.۶) برای ۳ ,۲ ,۱ = n راست است. حال فرض‌کنیدکه k یك عدد صحیحی باشدکه برای آن تساوی زیر برقرار است

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$$

$(k+۱)^۲$ را به‌دو طرف معادلهٔ بالا اضافه می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲+(k+۱)^۲&=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}+(k+۱)^۲\\
&=\frac{(k+۱)}{۶}[k(۲k+۱)+۶(k+۱)]\\
&=\frac{(k+۱)}{۶}(۲k^۲+۷k+۶)\\
&=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶} \qquad (۸.۶)
\end{aligned}$$

معادلهٔ (۸.۶) می‌گوید که اگر فرمول (۷.۶)، به ازای $n=k$، راست باشد، آنگاه این فرمول برای $n=(k+۱)$ نیز راست خواهد بود. بنابراین، ازآنجا که می‌دانیم فرمول برای ۳ = n راست است، حال می‌توانیم نتیجه بگیریم کـه، برای ۴ = n، نیز راست است، آنگاه برای ۵ = n، سپس برای ۶ = n، و بدین ترتیب برای هرعدد صحیح مثبت n راست است.

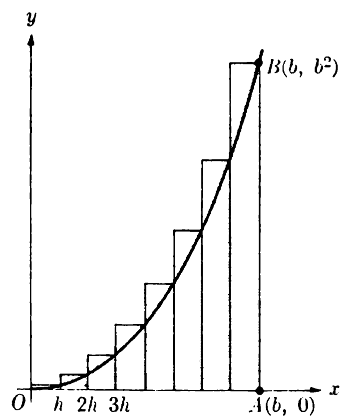
مثال ۳. مطلوب است تعیین مساحت سطحی کــه از بالا بـا کمان OB از منحنی $y=x^۲$، و از پایین با قطعه خط OA روی‌محور xها، واز راست با قطعه خط AB که از نقاط $A(b, ۰)$ و $B(b, b^۲)$، $(b\neq ۰)$ می‌گذرد، محدود است (شکل ۱۰).

حل. فرض کنید n یك عدد صحیح مثبت است وقطعه خط OA را به n زیرفاصله به طول $h=b/n$ تقسیم می‌کنیم. در شکل ۱۰، n را مساوی ۸ گرفته‌ایم. اما در دسته‌بندی جبری زیر n می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. بــه هر یك از زیرفاصله‌ها یك مستطیل وابسته می‌کنیم که قاعدهٔ آن همان زیرفاصله و رأس سمت راست بالایی آن روی منحنی $y=x^۲$ واقع است. این مستطیلها را به ترتیب از چپ به‌راست با اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. بنابراین

مستطیل شماره	که قاعدهٔ مستطیل روی زیرفاصله	و دارای ارتفاعی برابر با
۱	$۰\leqslant x\leqslant h$	$h^۲$
۲	$h\leqslant x\leqslant ۲h$	$(۲h)^۲$
۳	$۲h\leqslant x\leqslant ۳h$	$(۳h)^۲$
⋮	⋮	⋮
n	$(n-۱)h\leqslant x\leqslant nh$	$(nh)^۲$

فرض کنید S_n مجموع مساحتهای این n مستطیل محیطی است. در این صورت

$$\begin{aligned} S_n &= h(h)^۲+h(۲h)^۲+h(۳h)^۲+\cdots+h(nh)^۲ \\ &= h^۳[۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲] \qquad (۹.۶) \end{aligned}$$



شکل ۱۰. نمودار منحنی $y=x^۲$، $۰\leqslant x\leqslant b$ و مستطیلهای محیط، $n=۹$.

اما $h=b/n$، و مجموع مربعات داخل کروشه برابر است با $n(n+1)(2n+1)/6$
بنابراین می‌توانیم S_n را به‌صورت زیر بنویسیم

$$S_n=\frac{b^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \quad (10.6)$$

اگر S_n وقتی که $n\to\infty$ دارای حد باشد، این حد را برابر با مساحت سطح AOB تعریف می‌کنیم. سه کسر آخر معادلهٔ (۱۰.۶) دارای حدهای زیرند

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)=2$$

بنابراین

$$\text{مساحت } AOB=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{b^3}{6}(1)(1)(2)=\frac{b^3}{3} \quad (11.6)$$

مساحت سطح سهمی‌گون AOB برابر با $b^3/3$ است. توجه کنید که مساحت مثلث AOB برابر با $b^3/2$ است. بنابراین مساحت سطح سهمی‌گون ۲/۳ مساحت سطح مثلث متناظر است.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مساحت سطح سهمی‌گون مثال ۳ با $\int_0^b x^2\,dx$ بیان می‌شود که خوانده می‌شود: "انتگرال از ۰ تا bی $x^2\,dx$." بنابراین، نتایج به‌دست آمده به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3} \quad (12.6)$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان می‌دهد که چگونه این انتگرال و انتگرالهای دیگر به‌صورت ارزیابی می‌شوند. برای اطلاع بیشتر، به‌یکی از کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید.

تمرینها

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، با به‌کار بردن روش مثال ۱، شیب خط مماس به‌منحنی را در نقطهٔ داده شدهٔ P به‌دست آورید.

۱. $y=3x+5,\quad P(0,5)$

۲. $y=3x^2+5,\quad P(0,5)$

۳. $y=3x^2+5,\quad P(x_1,y_1)$

۴. $y=2/x,\quad P(1,2)$

۵. $y=2/x,\quad P(x_1,y_1)$

۶. $y=\sqrt{x},\quad P(9,3)$

۷. $y=\sqrt{x},\quad P(x_1,\sqrt{x_1})$

۸. $y=2x^2+4x-6,\quad P(1,0)$

۹. $y=ax^2+bx+c,\quad P(x_1, y_1)$ ‏‏ ۱۰. $y=x^3,\quad P(x_1, x_1^3)$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۶، روش مثال ۲ را به‌کار برید تا سرعت لحظه‌ای را برای معادلهٔ حرکت در زمان داده شده به‌دست آورید.

۱۱. $s=t^2,\quad t=2$ ‏‏ ۱۲. $s=t^2,\quad t=t_1$

۱۳. $s=at^2+bt+c,\quad t=t_1$ ‏‏ ۱۴. $s=1/(t+1),\quad t=3$

۱۵. $s=1/(t+1),\quad t=t_1$ ‏‏ ۱۶. $s=\sqrt{2t+1},\quad t=t_1$

۱۷. مساحت سطح AOB مثال ۳ را با استفاده از مستطیلهای محاطی به‌جای مستطیلهای محیطی به دست آورید. [توجه کنید: بـه جای معادلهٔ (۹.۶) باید به دست آورید $s_n=h^3[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$]

۱۸. فرض کنید S_n نشان دهندهٔ مجموع مساحتهای n مستطیل محیطی به‌کار رفته درمثال ۳ و s_n مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی متناظر در تمرین ۱۷ باشد. نشان دهید که

$$S_n-s_n=h^3n^2=\frac{b^3}{n}$$

اگر b و $0<\varepsilon$ داده شده باشند، N باید به چه بزرگی انتخاب شود تا به ازای $n\geqslant N$ بتوانیم تضمین کنیم که $|S_n-s_n|<\varepsilon$؟ آیا این N تضمین می‌کند که تفاوت بین s_n و مساحت سطح سهمی‌گون AOB و هم چنین تفاوت بین S_n و همان سطح کوچکتر از ε باشد؟ چرا؟

۱۹. با به‌کار بردن علامت گذاری تمرین۱۸، نشان دهید که به ازای هرعدد صحیح مثبت n

$$s_n<\frac{b^3}{3}<S_n$$

۲۰. با به کار بردن علامت گذاری تمرین ۱۸، نشان دهید کـه $\{s_n\}$ یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی و $\{S_n\}$ یك دنبالهٔ یکنوای‌کاهشی است.اهمیت هندسی این‌اطلاعات چیست؟

بخش دوم: پیوستگی

پیشگفتار

این قسمت معرف بخشی از یك سری سخنرانی درمورد حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی است که توسط مؤلف در سال تحصیلی ۱۹۶۴–۱۹۶۵ زیر نظر انجمن بازآموزی پیشرفتهٔ معلمین ریاضی در ایالت نیواینگلند ایراد شده است. این سخنرانیها برای فهم عمیق‌تر حساب دیفرانسیل و انتگرال که معمولاً دانشجو در یك درس مقدماتی فرامی‌گیرد ترتیب یافته است. در بین مباحثی که بیشترجلب توجه می‌کنند یکی حد و دیگری پیوستگی است. این قسمت که مربوط به پیوستگی است مشابه حد است، با همان منظور و همان دقت. شامل مثالهای زیادی درمورد توابع پیوسته و ناپیوسته است و براصل کمال دستگاه اعداد حقیقی متکی است. از جمله قضایای مشکلتر و مهمتری که ثابت می‌شوند قضیهٔ وجود ماکزیمم و مینیمم، قضیهٔ مقادیر میانی، و قضیهٔ پیوستگی یکنواخت برای توابع حقیقی پیوسته روی یك فاصلهٔ کراندار بسته است. نویسنده مدافع این نیست که این اثباتها در هر درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی عرضه شود. بلکه دانشجویان باید از این کتاب به‌عنوان متممی بر مطالب درسی خود استفاده کنند.

یك دنباله از قضایا به‌این خاطر آورده شده‌اند تا در اثبات قضیهٔ وجود ماکزیمم و مینیمم مورد استفاده قرارگیرند. این ترتیب لزوماً منطبق بر یك ترتیب منطقی اکید نیست. مثلاً، قضیهٔ پوششی هاین-برل اثبات شده وازآن به‌عنوان وسیله‌ای برای اثبات‌کرانداری برد یك تابع پیوسته روی یك فاصلهٔ بسته استفاده شده است. قضیهٔ پوششی برای اثبات قضیهٔ پیوستگی یکنواخت نیز به‌کار رفته است. اثباتهای دیگری برای قضیهٔ کرانداری و پیوستگی یکنواخت وجود دارند که به جای قضیهٔ پوششی هاین-برل از دنباله‌ها استفاده می‌کند، و ما این اثبات را در پایان بخش ۱۰ آورده‌ایم. (اثبات متناظر برای پیوستگی یکنواخت پیچیده‌تر است و ارائه نشده است.)

قسمت حد برای این قسمت لازم نیست، اما ساده‌تر وکوتاهتر است، و خواندن آن قبل‌ازاین قسمت احتمالاً خواننده رابا روش اثبات به‌وسیلهٔ اپسیلن و دلتا آماده‌ترمی‌سازد

و به‌کار بردن این روش را برای او راحتتر می‌کند.

این قسمت می‌تواند به منظورهای مختلف مورد استفاده قرارگیرد: (۱) به عنوان متممی بریك درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال، (۲) به‌عنوان یك بخش‌مجزا در یك درس پیش دانشگاهی روی توابع مقدماتی، (۳) به‌عنوان یك موضوع یا مرجع برای برنامه‌های بازآموزی معلمین (به ویژه برای بازآموزی پیشرفتهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال معلمین)، (۴) به عنوان مرجعی برای دانشجویان در درسهای پیشرفته‌تر حساب دیفرانسیل وانتگرال یا برای دانشجویان مبتدی در متغیرهای حقیقی که می‌خواهند مثالهای بیشتر یا توضیحات مقدماتی بیشتر از آنچه درکتاب درسی خود می‌یابند داشته باشند.

۷. مقدمه، تعریفها، و مثالها

یك تابع پیوسته چیست؟ آیا یك تـابع می‌تواند فقط در یك نقطه پیوسته باشد؟ آیا یك تابع می‌تواند فقط در نقاط گویا و یـا فقط در نقاط گنگ پیوسته باشد؟ اینها برخی از سؤالاتی است که در این قسمت مورد مطالعه قرار می گیرند. این مطالب صرفاً جنبهٔ توصیفی داشته و مطالب مهمتری نیز وجود دارند.

بخش عمدهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی مربوط به‌توابعی نظیر چندجمله‌ایها، توابع گویا، سینوس، کسینوس، تانژانت، وارونها و ترکیبات این توابع، و توابع نمایی و لگاریتمی می باشد. بررسی این توابع درحساب دیفرانسیل و انتگرال به ویژه برای یافتن نقاط مشتق‌پذیری‌وهم چنین یافتن قواعد ساده‌ای برای محاسبهٔ مشتقهای آنهاست. ازآنجایی که وجـود مشتق در یك نقطه مستلزم پیوستگی تابع در آن نقطه است، لـذا برای اثبات پیوستگی این توابع به‌برنامهٔ جداگانه‌ای نمی‌پردازیم. ولی چنین برنامه‌ای درمورد چند‌جمله‌ایها و سایرتوابع گویا تا اندازه‌ای آسان بوده ومتضمن دانستن قضایای زیرین است

قضیهٔ ۱۲. تابع ثابت، $f(x)=c$، در همه جا پیوسته است.

قضیهٔ ۱۳. تابع همانی، $f(x)=x$، در همه جا پیوسته است.

قضیهٔ ۱۴. اگر توابع f و g درنقطهٔ a پیوسته باشند،آنگاه توابع $f+g$ و $f\cdot g$ در نقطهٔ a پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۱۵. توابع چندجمله‌ای، در تمام R پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۱۶. اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و $f(a)\neq 0$، آنگاه تابع $1/f$ در نقطهٔ a پیوسته است.

قضیهٔ ۱۷. اگر f و g توابع چندجمله‌ای باشند، آنگاه تابع گویای f/g، در تمام نقاط x به‌طوری که $g(x)\neq 0$، پیوسته است.

اثبات این قضایا را به‌بعد موکول می‌کنیم. قضیهٔ ۱۵ مستقیماً از قضایای ۱۲، ۱۳، و ۱۴، و قضیهٔ ۱۷ از قضایای ۱۵ و ۱۶ نتیجه می‌شوند. اثباتها نیاز به‌یك مهارت متوسط در به‌کار بردن نامساویها، قدرمطلقها و به علاوه به درکی صحیح از تعریف پیوستگی نیاز دارند. با وجود این، سه قضیهٔ دیگردر حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به‌کار می‌رود که اثبات آنها کمی مشکلتر است. بخش مهمی ازاین قسمت به مطالعه و اثبات این قضایا اختصاص دارد.این قضایا را دراینجا بیان و بعداً اثبات خواهیم‌کرد. اصطلاحات‌نا آشنایی که در این قضایا ظاهر می‌شوند بعداً تشریح خواهند شد.

قضایای I، II، و III. فرض کنید f تابعی بادامنهٔ تعریف D باشد، به‌طوری که D فاصلهٔ بسته و کراندار $a \leqslant x \leqslant b$ است، هم چنین فرض کنید که f در تمام نقاط D پیوسته است. در این صورت

I. f دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم در D است.

II. اگر c عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یك نقطهٔ x متعلق به D وجود دارد به‌طوری که $f(x)=c$.

III. f در D پیوستهٔ یکنواخت است.

اکنون به‌سؤال اول خود برمی‌گردیم: یك تابع پیوسته چیست؟ و حتی قبل از آن، یك تابع چیست؟

تعریف ۳. فرض کنید X و Y مجموعه‌هایی غیرتهی، و f مجموعه‌ای از زوجهای مرتب (x, y) باشد به طوری که $x \in X$ و $y \in Y$. f را یك تابع از X در Y می‌نامیم هرگاه هیچ دو زوج مرتبی در f وجود نداشته باشند که مقدار x آنها برابر و مقدار y آنها نابرابر باشند. مجموعهٔ تمامی عنصرهای اول x از زوجهای (x, y) را دامنهٔ f نامیده و با D_f نمایش می‌دهیم؛ و برد f، که با R_f نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ تمامی عنصرهای دوم y در زوجهای (x, y) که متعلق به f می‌باشند.

مثال ۱. فرض کنید X مجموعهٔ تمامی انسانهای زنده و Y مجموعهٔ تمامی زنهایی باشد که تاکنون پا به عرصهٔ وجود گذارده‌اند. هم‌چنین فرض کنید f مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) باشد که در آن

x نمایشگر یك انسان زنده، و

y معرف مادر آن شخص است.

به هر انسان زنده یك مادر منحصر به فرد مربوط می‌شود، بنا براین به ازای یك مقدار x، هیچ دو زوج مرتبی در f نمی‌توانند دارای مقادیرمختلف y باشند. بنابراین f یك تابع است.دامنهٔ f تمامی مجموعهٔ X و بردآن بخشی‌از Y است‌که متشکل از مادران انسانهای زنده می‌باشد. پس

$$D_f = X, \quad R_f = \{\text{مادران انسانهای زنده}\}$$

مثال ۲. فرض کنید X مجموعهٔ تمامی مثلثها، Y مجموعهٔ اعداد حقیقی، و f مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) باشد که در آن

x یك مثلث دلخواه، و

y مساحتی است که توسط مثلث محصور شده و با واحد مناسبی اندازه‌گیری می‌شود

ازآنجایی که به هرمثلث x یك وتنها یك عدد حقیقی y که همان مساحت آن است، متناظر می‌شود؛ لذا f یك تابع است. دامنهٔ تعریف تابع f تمامی مجموعهٔ X و برد آن تمامی اعداد حقیقی مثبت است.

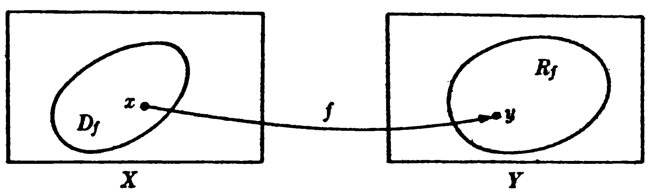
مثال ۳. فرض کنید نقش X و Y را در مثال ۱ عوض کنیم. یعنی فرض کنید X مجموعهٔ تمامی زنهایی که تاکنون پا به‌عرصهٔ وجود گذارده‌اند و Y مجموعهٔ تمامی انسانهای زنده باشد. به‌هرعدد x متعلق به X که یك مادر است (یا بوده)، فرزندان زندهٔ آن مادر را متناظر می‌کنیم. اگر x مادر خاصی با سه فرزند، مثلاً y_1، y_2، و y_3 باشد، آنگاه زوجهای مرتب (x, y_1)، (x, y_2)، و (x, y_3) دارای یك مقدار x بوده و مقادیر y آنها مختلف است. بنابراین مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x, y) که در آن

x یك مادر، و

y یك فرزند زندهٔ آن مادر است

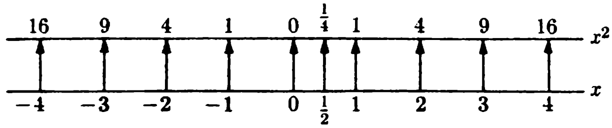
یك تابع نیست. با وجود این، چنین مجموعه‌ای، یك رابطه از X به Y نامیده می‌شود.

توضیح ۱. گوییم تابع f از X در Y یك نگاشت است هرگاه به هرعضو x از مجموعهٔ X یك عضو منحصر به فرد y از Y را وابسته سازد. ایـن مقدار منحصر به فرد y که این چنین به‌مقدار داده شدهٔ x متناظر می‌شود را به‌صورت $y = f(x)$ نمایش داده ومی‌خوانیم: "y مساوی است با اف x" یا "y مساوی است با مقدار f درنقطهٔ x". می‌گوییم f، x را روی $f(x)$، و به‌طورکلی دامنهٔ D_f را روی برد R_f می‌نگارد. (شکل ۱۱)



شکل ۱۱. تابع f دامنهٔ D_f را به‌روی برد R_f می‌نگارد. $y=f(x)$ نگار x است.

تعریف ۴. تابع f را کـه دامنه و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است، یك تابع حقیقی از یك متغیر حقیقی می‌نامیم.



شکل۱۲. به‌هرعدد حقیقی x روی مقیاس پایین، عدد $x^۲$ روی مقیاس بالایی متناظر می‌شود.

ازاین به‌بعد (تا پایان این‌قسمت) هرزمان که صحبت از تابع کنیم منظورمان تابع حقیقی از یك متغیر حقیقی است.

مثال۴. فرض‌کنید X و Y مجموعهٔ تمامی اعداد حقیقی است. به‌ازای هر x متعلق به X قرار می‌دهیم $f(x)=x^۲$. پس

$$f=\{(x,\ y)\ :\ y=x^۲,\ \ -\infty<x<\infty\}$$

دامنهٔ f تمام X و برد f مجموعهٔ اعداد حقیقی *نامنفی* است. روشهای متعددی برای نمایش تابع f وجود دارد:

۱. توسط جدولی که مقادیر x و مقادیرمتناظر آنها یعنی $x^۲$ را نشان می‌دهد. با این روش قسمتی از تابع f را می‌توان نمایش داد زیرا، چنین جدولی نمی‌تواند تمام مقادیر حقیقی x و مربعات آنها را نمایش دهد.

۲. توسط متناظرکردن مقیاسهای عددی، شبیه آنچه درخط‌کش محاسبه دیده می‌شود. این روش نیز کامل نیست.

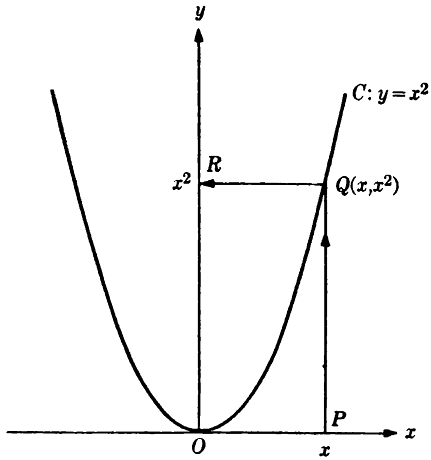
۳. توسط فرمول سادهٔ $f(x)=x^۲$، که در واقع بیان این واقعیت است‌که: "تابع f هرعدد حقیقی x را انتخاب کرده وآن را مربع می‌سازد." بنابراین

$$f(۳)=۳^۲=۹,\qquad f(-۲)=(-۲)^۲=۴$$

$$f(a+h)=(a+h)^۲=a^۲+۲ah+h^۲$$

وقتی که منظور از دامنهٔ تابع، بزرگترین مجموعهٔ ممکن از اعداد حقیقی باشد که دستور تابع در آن صادق است، از بیان مختصر "تابع $f(x)=x^۲$" به جای یك بیان دقیقتر به زبان زوجهای مرتب استفاده می‌کنیم.

۴. توسط نمودار معادلهٔ $y=x^۲$. این نمودار عبارت است از خم C (شکل ۱۳) که از نقاط با مختصات $(x,\ x^۲)$ تشکیل شده است. دامنهٔ f توسط محور xها، و برد آن توسط قسمت غیرمنفی محور yها مشخص شده است. به‌ازای هرنقطهٔ P با مختص x متعلق به‌این دامنه، نگارآن را با تعقیب فلشهایی‌که ازنقطهٔ P شروع و به نقطهٔ $Q(x,\ x^۲)$ روی خم و سپس از نقطهٔ Q شروع و به نقطهٔ R به مختص $x^۲$ روی محور yها ختم می‌شود، به دست می‌آوریم.



شکل ۱۳. مسیری که از P به Q واز Q به R ختم می‌شود نگاشت $f : x \to x^{2}$ را به‌دست می‌دهد.

علامت‌گذاری. بعضی از مؤلفین برای نشان دادن تابع f که x را بر x^{2} می‌نگارد قرارداد $f : x \to x^{2}$ را ترجیح می‌دهند که خوانده می‌شود "f، x را به x^{2} می‌برد." این نوع قرارداد تأکیدی برعمل نگاشت است، و مادامی‌که چیز مغایری گفته نشده است چنین مستفاد می‌شود که دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقیی خواهد بود که نگاشت‌می‌تواند روی آن عمل کند. مثلاً اگر

$$f : x \longrightarrow x^{2}+2x-3$$

دامنهٔ آن تمام اعداد حقیقی است، یعنی $-\infty < x < \infty$. اما اگر

$$f : \longrightarrow 1/x$$

آنگاه ۰ جزو دامنهٔ آن نیست.

ممکن است در مواردی هیچ عبارت جبری برحسب x، برای بیان $f(x)$ وجود نداشته باشد. لذا برای تعریف یك تابع گاهی علامت‌گذاری خاص به‌کار می‌برند، مانند مثال زیر.

مثال ۵. تابع بزرگترین جزء صحیح، به هر عدد حقیقی x بزرگترین عدد صحیح منحصر به فرد کوچکتر یا مساوی x را وابسته می‌سازد. بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را با قرار دادن x داخل کروشه‌ای به‌صورت زیر، نمایش می‌دهند

$$[x] = \text{بزرگترین عدد صحیح، کوچکتر یا مساوی } x \qquad (۱.۷)$$

با این قرارداد، می‌توانیم تابع بزرگترین جزء صحیح را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب نشان دهیم

$$f=\{(x, [x]) : -\infty < x < \infty\} \qquad \text{(۲.۷ الف)}$$

یا به‌صورت نگاشت

$$f : x \longrightarrow [x] \qquad \text{(۲.۷ ب)}$$

قسمتی از نمودار $y=[x]$ در شکل ۱۴ نشان داده شده است. این نمودار شبیه مجموعه‌ای از پله‌هـای یك نردبان بدون دیرك (دیوارهای کناری) است، و ابتدای هـر پله از نقطهٔ (n, n)، کـه در آن n یك عدد صحیح است، شروع می‌شود. برای $n \leqslant x < n+1$ داریم $[x]=n$. بنابراین

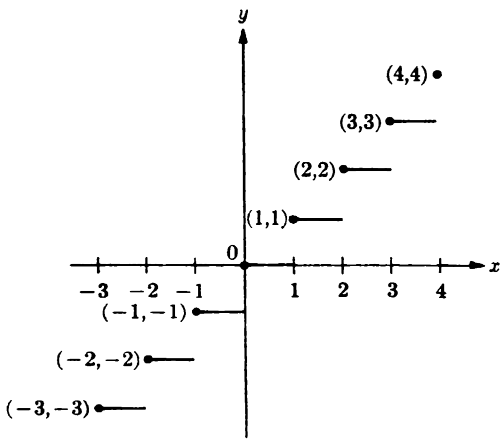
$$[-۲]=-۲, \qquad [-۱/۸]=-۲, \qquad [۰/۲]=۰, \qquad [۳/۹۹]=۳$$

هر پله قطعه خطی به‌طول واحد است که در انتهای چپ بسته و در انتهای راست باز است.

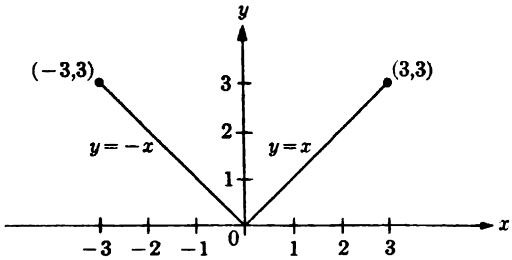
مثال ۶. قدر مطلق. تابع دیگری کـه برای آن نمـاد ویژه‌ای معرفی شده تابع قدرمطلق است. این تابع به‌هرعدد حقیقی x عدد $|x|$ را وابسته می‌سازد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|x|=\begin{cases} x & x \geqslant ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \qquad \text{(۳.۷)}$$

دو روش دیگر برای بیان $|x|$ وجود دارد که عبارتند از



شکل ۱۴. قسمتی از نمودار $y=[x]$ برای $-۳ \leqslant x \leqslant ۴$.



شکل ۱۵. نمودار $y=|x|$، $-۳\leqslant x\leqslant ۳$

$$|x|=\sqrt{x^{۲}} \qquad (۴.۷\ \text{الف})$$

و

$$|x|=\max(x,\ -x) \qquad (۴.۷\ \text{ب})$$

در معادلهٔ (۴.۷ الف) نماد ریشهٔ دوم، همان معنای ریشهٔ غیرمنفی معمولی را می‌دهد. در (۴.۷ ب) طرف راست تساوی به معنای ماکزیمم اعداد x و $-x$ است. هرسه معادله به یك نتیجه منتهی شوند. به‌عنوان مثال

از معادلهٔ (۳.۷) نتیجه می‌شود $\quad |-۷|=-(-۷)=۷$

از معادلهٔ (۴.۷ الف) نتیجه می‌شود $\quad |-۷|=\sqrt{(-۷)^{۲}}=\sqrt{۴۹}=۷$

از معادلهٔ (۴.۷ ب) نتیجه می‌شود $\quad |-۷|=\max(-۷,\ ۷)=۷$

شکل ۱۵ قسمتی ازنمودار $y=|x|$ را برای $-۳\leqslant x\leqslant ۳$ نشان می‌دهد. به‌ویژه، توجه کنید، کـه برای تمامی مقادیر x از -۳ تا ۳ داریم $|x|\leqslant ۳$. یعنی، اگـر دامنهٔ تابع قدرمطلق به‌فاصلهٔ -۳ تا ۳ محدود می‌شود، آنگاه برد آن فاصلهٔ از ۰ تا ۳ است. برعکس اگر برد را به $|x|\leqslant ۳$ محدود سازیم، آنگاه دامنهٔ آن نیز به‌فاصلهٔ $-۳\leqslant x\leqslant ۳$ محدود می‌شود. علاوه براینکه این‌مطلب از روی‌نمودار دیده می‌شود، از معادلهٔ (۴.۷ب) می‌توانیم آن را به‌سادگی ببینیم. زیرا اگر

$$|x|=\max(x,\ -x)\leqslant ۳$$

آنگاه

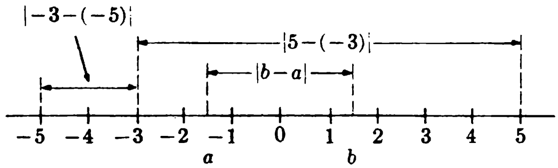
$$-x\leqslant ۳ \qquad \text{و} \qquad x\leqslant ۳$$

یا

$$x\geqslant -۳ \qquad \text{و} \qquad x\leqslant ۳$$

و این درست به‌معنای $-۳\leqslant x\leqslant ۳$ است.

تعبیر هندسی قدرمطلق. اگر a و b دوعدد دلخواه باشند، می‌توانیم آنها را بـه عنوان دونقطه روی محور xها درنظر بگیریم، فاصلهٔ این نقاط از فرمول



شکل ۱۶. فاصلهٔ بین a و b عبارت است از $|b-a|=|a-b|$.

$$|a-b|=|b-a|= \text{فاصلهٔ بین } a \text{ و } b \tag{۵.۷}$$

به‌دست می‌آید. بنابراین، فاصلهٔ ۳ــ تا ۵ــ عبارت است از

$$|-۵-(-۳)|=|-۲|=۲$$

و فاصلهٔ ۳ــ تا ۵ عبارت است از

$$|۵-(-۳)|=|۸|=۸$$

قدرمطلقها و نامعادلات همه جا مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، اگر a یك عدد حقیقی دلخواه، و h عدد مثبتی باشد، آنگاه مجموعهٔ تمامی اعدادی که در نامساوی

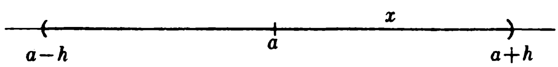
$$|x-a|<h \tag{۶.۷ الف}$$

یا

$$-h<x-a<h$$

صدق می‌کنند، عبارتند از فاصلهٔ باز

$$a-h<x<a+h \tag{۶.۷ ب}$$



شکل ۱۷. $|x-a|<h$ با $a-h<x<a+h$ یکسان است.

هردو فرمول (۶.۷ الف) و (۶.۷ ب) فاصلهٔ $a-h$ تا $a+h$ را، به‌استثنای نقاط ابتدا و انتهای آن، مشخص می‌سازند (شکل ۱۷). مفید است به این نکته توجه شود که رابطهٔ (۶.۷ الف) بیانگر این مطلب است که: "فاصلهٔ x و a ازمقدار h کمتراست" یا "دوری x از a کمتر از h است". بنابراین، (۶.۷ الف) یك فاصلهٔ به‌مرکز a و به‌شعاع h را مشخص می‌کند و (۶.۷ب) درست همین فاصله است. چنین فاصله‌ای یك همسایگی a نامیده می‌شود.

تعریف ۵. همسایگی[۱]. اگر a یك عددحقیقی دلخواه و h یك عدد مثبت باشد، آنگاه مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی x، به طوری که $|x-a|<h$، یك

۱. گاهی کلمهٔ "همسایگی a" به‌هرفاصلهٔ باز $p<x<q$ که شامل a است، اطلاق می‌شود. در اینجا همسایگیهای مورد نظرما حول a متقارن است.

h-همسایگی a نامیده می‌شود. گاهی این همسایگی را با نماد $N_h(a)$

$$N_h(a) = \{x : |x-a| < h\} \qquad (۷.۷)$$

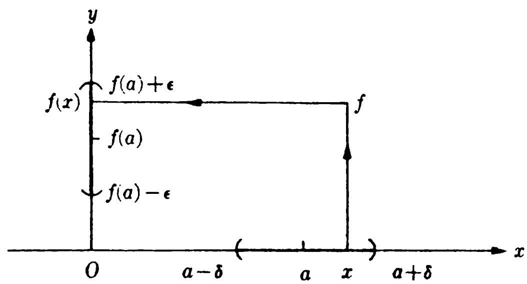
نمایش می‌دهیم.

پیوستگی. پیوستگی یك تابع خاصیتی موضعی است. به‌طور غیردقیق، تابع f در یك نقطهٔ a ازدامنهٔ تعریفش پیوسته است اگر نقاط x نزدیك به a را روی نقاط y نزدیك به $f(a)$ بنگارد. نزدیکی با قدر مطلق سنجیده می‌شود، و تعریف پیوستگی به‌وسیلهٔ ε، δ (اپسیلن، دلتا) که در زیر آورده شده در اکثر مواقع مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۶. فرض کنید f تابعی حقیقی از یك متغیر حقیقی و با دامنهٔ D بوده و a نقطه‌ای متعلق به D باشد. تابع f در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یك $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$\text{اگر } |x-a| < \delta \text{، آنگاه } |f(x)-f(a)| < \varepsilon \qquad (۸.۷)$$

توضیح ۱. δ در نامعادلهٔ (۸.۷) ممکن است به تابع f، نقطهٔ a، و عدد حقیقی ε وابسته باشد، و معمولاً نیز چنین است. بنابراین، نمی‌توان بدون اینکه تابع f، نقطهٔ a، و عدد $\varepsilon > 0$ داده شده باشند δ را به‌دست آورد؛ ودرصورتی که این‌مقادیرداده شوند، می‌توانیم با انتخاب دامنهٔ f روی محورxها و بردآن روی محورyها، کوشش کنیم که δ- همسایگی نقطهٔ a را به‌دست آوریم به‌قسمی‌که هرگاه x در این همسایگی و در دامنهٔ f واقع شود آنگاه نگار آن، $f(x)$، در ε- همسایگی $f(a)$ قرارگیرد. (شکل ۱۸)



شکل ۱۸. اگر $x \in N_\delta(a)$، آنگاه $f(x) \in N_\varepsilon(f(a))$.

مثال ۷. (این‌مثال اثبات قضایای ۳ و ۴ را در حالت خاص دربر دارد.) فرض کنید f یك تابع خطی است

$$f(x) = mx + b, \qquad -\infty < x < \infty \qquad (۹.۷)$$

دراین‌صورت

$$f(x) - f(a) = (mx+b) - (ma+b) = m(x-a)$$

بنابراین، اگر $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد، آنگاه

$$|f(x)-f(a)|=|m(x-a)|=|m|\ |x-a|<\varepsilon$$

مشروط بر اینکه

(۱۰.۷ الف) $$m=\circ$$

یا

(۱۰.۷ ب) به‌ازای $m\neq\circ$ $$|x-a|<\frac{\varepsilon}{|m|}$$

در حالت اول، δ می‌تواند هر عـدد مثبتی باشد. لیکن می‌توانیم این حالت خاص را نیز همراه (۱۰.۷ ب) یکی کرده و δ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

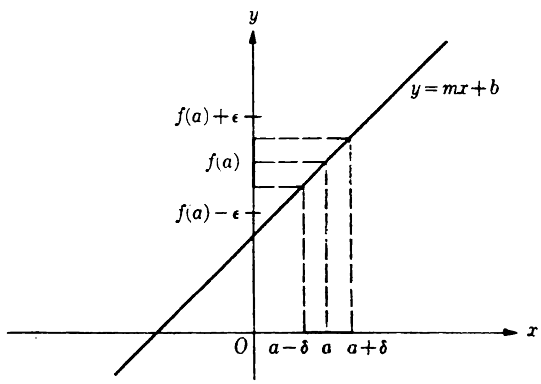
(۱۱.۷) $$\delta=\frac{\varepsilon}{1+|m|}$$

بنابراین، برای تابع f در معادلهٔ (۹.۷)، اگر a یك عدد حقیقی دلخواه و ε یك عدد مثبت باشد، معادلهٔ (۱۱.۷) δی مثبتی به‌دست می‌دهد به‌طوری که

اگر $|x-a|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

بنابراین، تابع خطی (۹.۷) در هر نقطهٔ a پیوسته است. به صورت خلاصه‌تر می‌گوییم: ”f همه‌جا پیوسته است.“ شکل ۱۹ رابطهٔ بین δ و ε موجود در رابطهٔ (۱۱.۷) را به‌ازای $m=1$ نشان می‌دهد.

توجه کنید که قضیهٔ ۱۲ حالت خاص $m=\circ$، و قضیهٔ ۱۳ حالت خاص $m=1$ و $b=\circ$ است.



شکل ۱۹. اگر $f(x)=mx+b$ و $\varepsilon>\circ$، آنگاه δ را برابر $\varepsilon/(1+|m|)$ انتخاب می‌کنیم. (در اینجا $m=1$ و $\delta=\varepsilon/2$.)

مثال۸. فرض کنید f تابع بزرگترین جزء صحیح باشد

$$f(x)=[x]$$

دو حالت وجود دارد که باید بررسی شود: (۱) n یك عـدد صحیح و $a=n$؛ (۲) a یك عدد غیرصحیح است.

در حالت اول، $f(a)=n$ و

$$\text{به‌ازای } x<a \text{ و } |x-a|<1 \text{، داریم} \qquad f(x)=n-1$$

$$\text{به‌ازای } x\geqslant a \text{ و } |x-a|<1 \text{، داریم} \qquad f(x)=n$$

بنابراین، δ هرعدد مثبت کوچکی هم که باشد، xهایی درون هر δ- فاصلهٔ به‌مرکز a وجود دارد به طوری کـه $|f(x)-f(a)|=1$. پس اگر $\varepsilon<1$ انتخاب شود، شرط (۸.۷) براورده نمی‌شود. بنابراین، اگر a مساوی یك عدد صحیح باشد f در آن نقطه ناپیوسته است. (شکل ۱۴)

در حالت دوم، که a یك عدد صحیح نیست، فرض کنید $n=[a]$. در این صورت $n<a<n+1$، و دوعدد

$$\delta_1=a-n, \qquad \delta_2=(n+1)-a \qquad \text{(۱۳.۷ الف)}$$

هردو مثبت هستند. فرض کنید

$$\delta=\min(\delta_1, \delta_2)=\min(a-[a], [a]+1-a) \qquad \text{(۱۳.۷ ب)}$$

در این صورت $\delta>0$ واگر $|x-a|<\delta$، آنگاه x بین $[a]$ و $[a]+1$ بوده وداریم

$$f(x)=[x]=[a]=f(a), \qquad |f(x)-f(a)|=0$$

بنابراین، تابع بزرگترین جزء صحیح در هرنقطهٔ غیرصحیح a پیوسته است، زیرا، به‌ازای یك چنین aای، وهر $\varepsilon>0$، ازمعادلهٔ (۱۳.۷ ب) یك $\delta>0$ به‌دست می‌آید به‌طوری که

$$\text{اگر } |x-a|<\delta \text{، آنگاه} \qquad |f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$$

مثال۹. فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$، و $x\geqslant 0$. حالتهای $a=0$ و $a>0$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

اگر $a=0$، آنگاه

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{x}-\sqrt{0}|=\sqrt{x}$$

اگر $\varepsilon>0$، آنگاه $\sqrt{x}<\varepsilon$ هرگاه $0\leqslant x<\varepsilon^2$. بنابراین، به‌ازای $a=0$ و $\varepsilon>0$، اگر $\delta=\varepsilon^2$ فرض‌شود، شرط پیوستگی براورده می‌شود وتابع درنقطهٔ $a=0$ پیوسته است.

اگر $a>0$، آنگاه

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

اگر $\varepsilon > 0$ و $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$، آنگاه $\delta > 0$ و*

$$|x-a|<\delta \Longrightarrow \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon$$

$$\Longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

از اینرو تابع ریشهٔ دوم در هرنقطه از دامنهٔ خود پیوسته است.

مثال۱۰. فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد}\\ 1 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$$

از آنجاکه در هر فاصله‌ای از اعداد حقیقی اعدادگویا و گنگ وجود دارند، به‌ازای هر عدد حقیقی a و هر $h > 0$، همسایگی $N_h(a)$ شامل اعدادگویا و گنگ می‌باشد. ازاینرو h هراندازه هم کوچك انتخاب شود، می‌توان x گویا یا گنگی مخالف a در $N_h(a)$ انتخاب کرد. به ازای هر عدد حقیقی داده شدهٔ a و هر $1 > \varepsilon > 0$، و هر عدد $\delta > 0$، عددی مانند x در δ- همسایگی a وجود دارد به‌طوری‌که $|f(x)-f(a)| = 1 > \varepsilon$. بنابراین این تابع همه‌جا ناپیوسته است.

مثال۱۱. تابع خطکش. فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\\ 1/q & \text{اگر } x \text{ عدد گویا و ساده شدهٔ } p/q\text{، } q>0\text{، باشد}\end{cases}$$

بنابراین

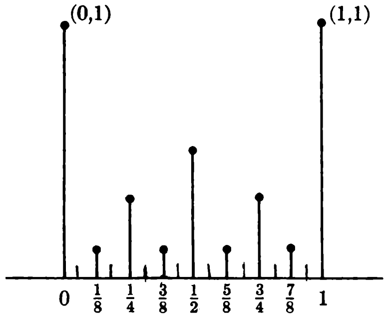
$$f(0)=f(1)=1,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2},\qquad f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4},\qquad f\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{3}{8}\right)=f\left(\frac{5}{8}\right)=f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{8},\ \ldots$$

اگر بعضی از اعداد گویای واقع در فاصلهٔ $(0,1)$ را انتخاب کرده و روی این اعداد گویای x، قطعه خطی به‌ارتفاع $f(x)$ رسم کنیم، نمودار حاصل (شکل۲۰) شبیه زینه‌های خط‌کش خواهد بود. از اینرو، این تابع را تابع خط‌کش می‌نامند. (برای به‌دست‌آوردن بقیهٔ نمودار، این قسمت را با واحدهای ۱، ۲، ۳، . . . به‌راست وچپ حرکت دهید.)

---

* علامت $\Longrightarrow$ به‌معنی "نتیجه می‌شود که" است.



شکل۲۰ قسمتی از نمودار تابع خط‌کش. (پاره‌خطهای عمودی قسمتهایی از نمودار نبوده، بلکه فقط برای هدایت چشم ترسیم شده‌اند. فقط نقاط انتهایی آنها جزو نمودارند.)

تابع خط‌کش در چه نقاطی پیوسته است؟ مسلماً در هر نقطهٔ گویای a پیوسته نیست؛ زیرا، اگر a یك عددگویا و $f(a)=۱/q$ باشد، آنگاه $\varepsilon=۱/(۲q)$ عدد مثبتی است که برای آن هیچ δی مثبتی وجود ندارد، زیرا اعداد گنگ x به‌طور دلخواه نزدیك به a وجود دارند.

فرض‌کنید a یك نقطهٔ گنگ باشد. در این‌صورت $f(a)=۰$، و اگر $\varepsilon>۰$ داده شده باشد شرط

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

تبدیل به‌شرط

$$|f(x)|<\varepsilon \tag{۱۴.۷}$$

می‌شود. نامساوی (۱۴.۷) به‌ازای هرمقدار گنگ x صادق است؛ زیرا، برای چنین xهایی $f(x)=۰$. اگر x عدد گویای p/q درساده‌ترین شکل‌خود باشد، آنگاه نامساوی (۱۴.۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$q>\frac{۱}{\varepsilon} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{q}<\varepsilon \tag{۱۵.۷}$$

اگر q به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آنگاه نامساوی (۱۵.۷) برقرار می‌شود. آیا می‌توان δای بزرگتر از صفر یافت به‌طوری‌که وقتی‌x در داخل فاصله‌ای به‌طول δ از a قراردارد بزرگی مورد نظر q را تضمین‌کند؟ بله، به‌طریق زیر اعداد صحیح و مثبت

$$۱,\ ۲,\ \ldots,\ \left[\frac{۱}{\varepsilon}\right] \tag{۱۶.۷}$$

که در نامساوی (۱۵.۷) صدق نمی‌کنند را درنظر بگیرید. (اگر اتفاقاً ε داده شده، بزرگتر از ۱ باشد، ازاعداد نوشته شده در (۱۶.۷) صرف‌نظر کرده و δ را برابر ۱ بگیرید، زیرا در این‌صورت نامساوی (۱۴.۷) برای تمامی xها درست است.) درفهرست (۱۶.۷) فقط تعداد باپایانی عدد صحیح وجود دارد. اگر q برابر یکی از این اعداد باشد، حداکثر q انتخاب برای p وجود دارد به‌طوری‌که

$$a-\frac{۱}{۲}<\frac{p}{q}<a+\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، اگر توجه خود را به‌یك همسایگی به‌شعاع ۱/۲ و به‌مرکز a محدود کنیم، فقط تعداد باپایانی (حداکثر $n^۲$، وقتی $n=[۱/\varepsilon]$) از اعداد گویای p/q به‌دست می‌آوریم که مخرجهای آنها در نامساوی (۱۵.۷) صدق نمی‌کنند. اگر این اعدادگویا را با

$$r_۱, r_۲, \cdots, r_N, \qquad N\leqslant n^۲$$

نمایش دهیم، آنگاه اعداد

$$|a-r_۱|, |a-r_۲|, \cdots, |a-r_N| \tag{۱۷.۷}$$

جملگی‌مثبت‌اند؛ زیرا rها گویا و a گنگ است. فرض کنید δ برابر مینیمم اعداد (۱۷.۷) باشد.[۱] بنابراین $\delta>۰$ و هرعددگویای p/q که فاصله‌اش از a کمتراز δ باشد نمی‌تواند مخرجش در فهرست (۱۶.۷) قرار گیرد، پس $q>۱/\varepsilon$. بنابراین

$$|x-a|<\delta \Longrightarrow \begin{cases} x \text{ گنگ} \\ \text{یا} \\ x \text{ عددگویای } p/q\text{، } q>۱/\varepsilon \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |f(x)-f(a)| = \begin{Bmatrix} ۰ \\ \text{یا} \\ ۱/q \end{Bmatrix} < \varepsilon$$

بنابراین، تابع خط‌کش در هرنقطهٔ گنگ a پیوسته است.

توضیح. ایدهٔ مکنون در بحثی‌که به‌دنبال رابطهٔ (۱۵.۷) آمده دقیقاً چنین است: اگرتوجه خودمان را به‌اعدادگویایی‌معطوف کنیم‌که مخرجهای آنها به‌قدری‌کوچك باشندکه شرایط پیوستگی‌را براورده نسازند،آنگاه یك فاصلهٔ مثبت مینیمم از a تا این‌اعداد وجود خواهد داشت. اعدادگویایی‌که فاصلهٔ آنها از a،کوچکتر از این مقدار مینیمم باشد، باید دارای مخرجهای بزرگتری باشند؛ واین مقادیر شرط پیوستگی را براورده می‌سازند. ازآنجایی

۱. به‌تمرینهای ۹ و ۱۰، دربارهٔ وجود ماکزیمم و مینیمم یك مجموعهٔ باپایان، توجه کنید.

که فقط به‌رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ a توجه داریم، پس اگر توجه خود را به‌فاصلهٔ از $a-(۱/۲)$ تا $a+(۱/۲)$ محدود سازیم، چیزی از دست نخواهیم داد.

تمرینها

۱. فرض‌کنید $X=\{۱, ۲, ۳\}$ و $Y=\{۰, ۱\}$.
(الف) آیا مجموعهٔ $f=\{(۱, ۱), (۲, ۰), (۳, ۱)\}$ یك‌تابع از X در Y است؟ $f(۱)$ چیست؟
(ب) آیا مجموعهٔ $\{(۱, ۱), (۱, ۰), (۲, ۱)\}$ یك تابع از X در Y است؟ چرا؟
(پ) چند تابع متمایز با دامنهٔ X وبرد Y وجود دارد؟ بعضی از آنها را بنویسید.

۲. فرض‌کنید X و Y مجموعـهٔ اعـداد حقیقی از ۰ تا ۱ باشندکه خود این اعداد را نیز دربر دارند. کدام‌یك از روابط زیر یك تابع از X در Y است؟ در هرموردکه f یك تابع است، دامنه و برد آن را تعیین‌کنید.

(الف) $f(x)=۲x$، $۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}$ (ب) $f(x)=۱-۲x$، $۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}$

(پ) $f(x)=۱-۲x$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$ (ت) $f(x)=x^۲$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$

(ث)
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & \text{اگر } ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۲x-۱ & \text{اگر } \frac{۱}{۲}< x\leqslant ۱ \end{cases}$$

۳. فرض‌کنید f تابع زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ ۰ & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

f کجا پیوسته است؟ ادعای خود را اثبات‌کنید.

۴. فرض‌کنید f تابع زیر است

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ c-۲x & ۱< x\leqslant ۲ \end{cases}$$

برای چه مقدار (چه مقادیری) از c، تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟ نمودار f را برای این مقدار از c و مقادیر دیگر رسم کنید.

۵. کدامیك ازعبارات زیر به‌ازای هرمقدار حقیقی a و b درمورد قدرمطلق درست است؟ برای هرعبارتی‌که به‌ازای تمامی مقادیر a و b درست نیست، نشان دهید به‌ازای چه مقادیری از a و b نادرست است.

(الف) $|ab|=|a|\,|b|$ (ب) $|ab|<|a|\,|b|$

(پ) $|a+b|<|a|+|b|$ (ت) $|a+b|=|a|+|b|$

(ث) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (ج) $|a-b|=|a+b|$

(چ) $|a-b|<|a|-|b|$ (ح) $|a-b|=|a|-|b|$

(خ) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ (د) $|a-b|\geqslant|b|-|a|$

(ذ) $|a-b|\leqslant|a|+|b|$

۶. در تابع خط‌کش موردبحث(مثال ۱۱) فرض کنید $f(x)=۱/q$ را با $f(x)=۱/q^۲$ (وقتی $x=p/q$ درساده‌ترین شکل آن است) تعویض کنیم. این تعویض چه اثری در رابطه‌های (۱۵.۷)، (۱۶.۷)، و (۱۷.۷) می‌گذارد؟ تابع جدید در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۷. نمودار هریك از توابع زیر را رسم کنید.

(الف) $f(x)=x-[x]$ (ب) $f(x)=x+[x]$

(پ) $f(x)=\max(x^۲,\ ۴-x^۲)$ (ت) $f(x)=۲+|x^۲-۲|$

(ث) $f(x)=[۲x-۳]$ (ج) $f(x)=۲[x]-۳$

۸. فرض کنید a و b اعدادی حقیقی و $c=(a+b)/۲$ و $d=|a-b|/۲$ هستند.

(الف) اگر a، b، c، روی محور xها قرارداشته باشند، وضعیت c و d از نظرهندسی نسبت به a و b چگونه است؟

(ب) برای چه مقداری از x داریم $|x-c|\leqslant d$؟

(پ) یك دلیل هندسی ارائه‌دهید که‌چرا $c+d=\max(a,b)$ و $c-d=\min(a,b)$؟

(ت) به‌روش جبری (یا باکاربرد مستقیم تعریف $|x|$) ثابت کنید

$$\max(a,b)=\frac{a+b}{۲}+\frac{۱}{۲}|a-b|$$

و

$$\min(a,b)=\frac{a+b}{۲}-\frac{۱}{۲}|a-b|$$

۹. گفته می‌شود که یك مجموعهٔ S از اعداد حقیقی دارای یك ماکزیمم است اگر S شامل عددی مانند c باشد به‌طوری کــه برای تمامی xهای متعلق به S داشته باشیم $x\leqslant c$. روشن‌است که ماکزیمم یك مجموعهٔ تك‌عضوی، خودآن عضو است. ثابت‌کنید به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n، مجموعهٔ n عضوی دارای یك ماکزیمم است.

۱۰. مشابه تمرین ۹، مینیمم یك مجموعهٔ S را تعریف کرده و ثابت کنید که اگر S دارای n عضو باشد (n هرعدد صحیح و مثبت)، آنگاه S دارای یك مینیمم است.

۱۱. یك مثال از یك مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی ارائه دهید که نه دارای مینیمم باشد و نه ماکزیمم.

۱۲. فرض کنید D فاصلهٔ باز $1 > x > 0$ است، برای هر a متعلق به D، نشان دهید: یك همسایگی $N_h(a)$ وجود دارد که کاملاً درون D قراردارد. این مطلب را با شکل نیز نشان دهید.

۱۳. فرض کنید $f(x) = 1/x$، $x \neq 0$. نشان دهید که f درهر نقطهٔ $a \neq 0$ پیوسته است.

۱۴. قسمت ۱ از قضیهٔ ۱۴ (مجموع دو تابع پیوسته، پیوسته است) را اثبات کنید.

۱۵. قسمت ۲ از قضیهٔ ۱۴ (حاصلضرب دو تابع پیوسته، پیوسته است) را اثبات کنید.

۱۶. قضیهٔ ۱۶ (در نقطه‌ای که یك تابع پیوسته مخالف صفر است، عکس آن نیز پیوسته است) را اثبات کنید.

۸. وجود ماکزیمم و مینیمم یك تابع. مثالها

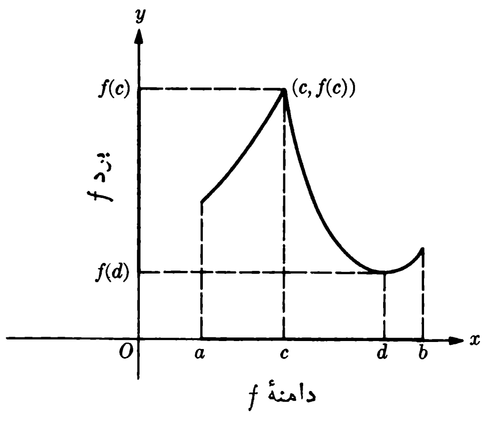
توابعی را که مورد بررسی قرار می‌دهیم، توابع حقیقی با متغیر حقیقی هستند. اگر D دامنهٔ چنین تابعی بوده و c یك نقطه در D باشد به‌طوری که

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad \text{به‌ازای هر } x \text{ متعلق به } D \tag{۱.۸}$$

می‌گوییم f در نقطهٔ c دارای یك ماکزیمم است. همین طور، اگر d یك نقطهٔ متعلق به D باشد به‌طوری که

$$f(x) \geqslant f(d) \qquad \text{به‌ازای هر } x \text{ متعلق به } D \tag{۲.۸}$$

می‌گوییم f در نقطهٔ d دارای یك مینیمم است. (شکل ۲۱)



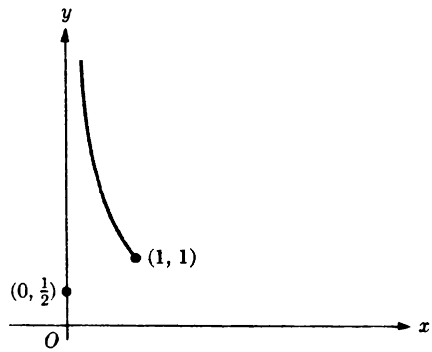
شکل ۲۱. نمودار f، یك ماکزیمم تابع f را در نقطهٔ c و یك مینیمم آن را در نقطهٔ d نشان می‌دهد.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال در مورد وجود و محل ماکزیمم و مینیمم یك تابع مسائلی نظری وکاربردی وجود دارند. درقسمت گذشته قضیهٔاول را بیان کردیم که می گوید اگر دامنهٔ تابع f، یك فاصلهٔ بسته وکراندار، و f در تمام دامنهٔ خود پیوسته باشد، آنگاه f دارای ماکزیمم و مینیمم است. قبل از اینکه اثبات این قضیه را شروع کنیم بهمثالهایی میپردازیم که شرایط قضیه را دارا نیستند: یا دامنهٔ آنها بسته نیست، یا کراندار نیستند، و یا تابع در تمام دامنهٔ خود پیوسته نیست.

مثال ۱. فرض کنید

$$f_۱(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & x=۰\\[2ex] \frac{۱}{x} & ۰<x\leqslant ۱\end{cases}$$

دامنهٔ تـابع $f_۱$ فاصلهٔ بستهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱$ است، اما تـابع در نقطهٔ $x=۰$ ناپیوسته است (شکل۲۲) و دارای ماکزیمم نمیباشد. مینیمم تابع $f_۱(۰)=۱/۲$ است.

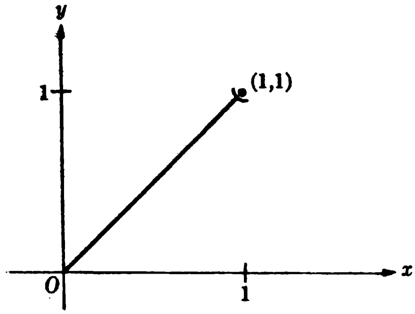


شکل ۲۲. قسمتی از نمودار تابع مثال ۱.

مثال ۲. فرض کنید

$$f_۲(x)=x,\qquad ۰<x<۱$$

دامنهٔ تابع، فاصله باز $۰<x<۱$ است. این تابع در تمام نقاط دامنهٔ خود پیوسته است؛ اما نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم؛ زیرا هر مقداری را که تابع بگیرد، یك مقدار بزرگتر ــ بهازای مقدار بزرگتری از x ــ و یك مقدار کوچکتر ــ بهازای مقدار کوچکتری از x ــ وجود خواهد داشت. نمودار این تابع در شکل۲۳ نشان داده شده است.

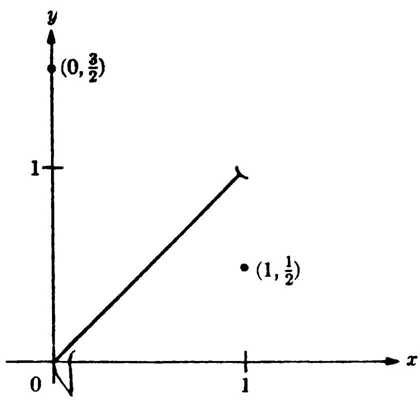


شکل ۲۳. مبدأ و نقطهٔ (۱ ,۱) متعلق به‌نمودار نیست.

مثال ۳. فرض کنید

$$f_{۳}(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۲} & x=\circ\\ x & \circ<x<۱\\ \frac{۱}{۲} & x=۱\end{cases}$$

دامنهٔ تابع $f_{۳}$ فاصلهٔ بستهٔ $\circ \leqslant x \leqslant ۱$ است، اما تابع درنقاط $x=\circ$ و $x=۱$ ناپیوسته است. $f_{۳}(\circ)=۳/۲$ ماکزیمم تابع است، ولـی مینیمم وجود ندارد. نمودار تابع در شکل ۲۴ نشان داده شده است. با جایگزین کردن مقدار $-۱/۲$ به جای $۱/۲$، در نقطهٔ $x=۱$ به‌تابعی ناپیوسته دست می‌یابیم که دارای ماکزیمم و مینیمم است، در صورتی‌که حتی تابع در نقاط انتهایی دامنهٔ خود ناپیوسته است.

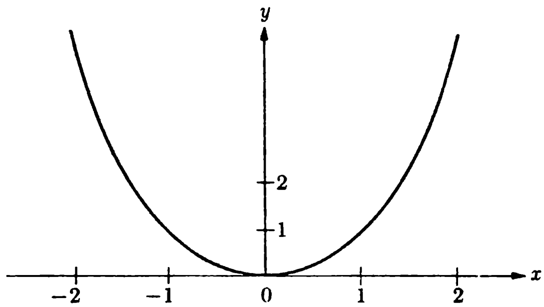


شکل ۲۴

مثال ۴. فرض کنید

$$f_{۴}(x)=x^{۲},\qquad -\infty < x < \infty$$

این تابع همه جا پیوسته است. دارای یك مقدار مینیمم $f_{۴}(۰)=۰$ است ولی دارای ماکزیمم نیست.



شکل ۲۵. قسمتی از نمودار تابع $f_{۴}(x)=x^{۲}$.

تمرینها

۱. تابعی با دامنهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$، مثال بزنید که:
(الف) فقط در نقطهٔ $x=۱/۲$ ناپیوسته بوده، و دارای یك ماکزیمم درنقطهٔ $x=۰$ و یك مینیمم در نقطهٔ $x=۱$ باشد. نمودار آن را رسم کنید.
(ب) فقط درنقطهٔ $x=۱/۲$ ناپیوسته بوده وماکزیمم ومینیمم نداشته باشد. نمودارش را رسم کنید.
۲. تابعی با دامنهٔ $-\infty < x < \infty$ مثال بزنید که:
(الف) همه‌جا پیوسته بوده ودارای ماکزیمم ومینیمم باشد. نمودارش را رسم کنید.
(ب) همه جا پیوسته بوده و در نقطهٔ $x=۰$ دارای ماکزیمم باشد، ولی دارای مینیمم نباشد. نمودارش را رسم کنید.
(پ) در همه جا ناپیوسته بوده و دارای ماکزیمم ومینیمم باشد. نمودارش راتوصیف کنید.
(ت) در همه جا ناپیوسته بوده، و ماکزیمم و مینیمم نداشته باشد.

۹. کرانداری و وجود ماکزیمم و مینیمم. کرانهای بالا و پایین

مجموعهٔ S از اعداد حقیقی را بالا کراندار، یا ازطرف بالا کراندار می‌نامند، هرگاه یك عدد M وجود داشته باشد به‌طوری که

$$x \leqslant M \qquad \text{به‌ازای هر } x \in S$$

عدد M یك کران بالای S نامیده می‌شود. بدین ترتیب، برای $f_{۲}(x)$ در شکل ۲۳، برد تابع عبارت است از مجموعهٔ

$$S=\{y : \text{۰} < y < \text{۱}\}$$

این مجموعه دارای کرانهای بالای زیادی است: ۱، $\sqrt{۲}$، ۲، π، ۷۳.

کوچکترین کـران بالا ۱ است. به‌طور کلی، L را کوچکترین کران بالای مجموعهٔ S می‌نامند اگر و تنها اگر

(الف) L یك کران بالای S باشد، و

(ب) هیچ عدد کوچکتر از L، یك کران بالای S نباشد.

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که بیش از یك کوچکترین کران بالا، برای یك مجموعهٔ داده شده نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، وقتی یك کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ S وجود داشته باشد، منحصر به‌فرد نیز هست و می‌نویسیم

$$L=\text{lub}(S)$$

همین طور، عدد l، یك کران پایین مجموعهٔ S است هرگاه

$$l \leqslant x \qquad \text{به‌ازای هر } x \text{ متعلق به } S$$

اگر l یك کران پایین S باشد، آنگاه هرعدد کوچکتر از l نیز یك کران پایین S می‌باشد، و کوچکترین کران پایین وجود ندارد. به هر حال، l یك بزرگترین کران پایین S است اگر و تنها اگر

(الف) l یك کران پایین S باشد، و

(ب) هیچ عدد بزرگتر از l، یك کران پایین S نباشد.

وقتی یك بزرگترین کران پایین وجود داشته باشد منحصر به‌فرد نیز هست و با

$$l=\text{glb}(S)$$

نشان داده می‌شود.

یك مجموعه که ازطرف بالا و پایین کراندار باشد، مجموعهٔ کراندار نامیده می‌شود. یك خاصیت بنیادی دستگاه اعدادحقیقی، تمامیت آن است، که در اصل زیر بیان شده‌است.

اصل تمامیت. اگر S یك مجموعهٔ غیرتهی کراندار از اعداد حقیقی باشد، اعداد حقیقی l و L وجود دارند به‌طوری که

$$l=\text{glb}(S) \qquad \text{و} \qquad L=\text{lub}(S)$$

توضیح ۱. گاهی اوقات اصل تمامیت را بدین‌صورت بیان می‌کنند: "یك مجموعهٔ کراندار

از اعداد حقیقی، یک بزرگترین کران پایین و یک کوچکترین کران بالا دارد.“ اما در این عبارت فعل ”دارد“ نباید طوری تعبیر شود که از آن متعلق بودن $\text{glb}(S)$ و $\text{lub}(S)$ به مجموعهٔ S استنباط گردد. به عنوان مثال، اگر S فاصلهٔ باز $a < x < b$ باشد، در این صورت $\text{glb}(S) = a$ و $\text{lub}(S) = b$، و هیچ‌کدام متعلق به S نیستند.

توضیح ۲. دستگاه اعداد گویا تمام نیست. به‌عنوان مثال، فرض کنید که S مجموعهٔ تمامی اعداد گویای مثبتی باشد که مربع آنها از ۲ کوچکتر است

$$S = \{x : x > ۰,\ \text{گویا}\ x,\ x^۲ < ۲\}$$

می‌توان ثابت کرد (البته با کمی زحمت) که هیچ عدد گویایی کوچکترین کران بالای S، نیست. در حقیقت

$$\text{lub}(S) = \sqrt{۲}$$

و می‌دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

توضیح ۳. مترادفهای glb و lub عبارتند از

$$\inf(S)\text{، به‌معنای اینفیمم } S\text{، به‌جای } \text{glb}(S)$$

و

$$\sup(S)\text{، به‌معنای سوپریمم } S\text{، به‌جای } \text{lub}(S)$$

توضیح ۴. حد دنباله‌های یکنوا. اگر $a_۱, a_۲, \ldots$ اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که

$$a_n \leqslant a_{n+۱} \qquad \text{به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت } n$$

در این صورت می‌گوییم که: aها تشکیل یک دنبالهٔ یکنوای افزایشی می‌دهند. برای چنین دنباله‌ای، $a_۱$ بزرگترین کران پایین آن است، اما ممکن است کوچکترین کران بالا وجود نداشته باشد. به‌هر حال، اگر دنباله از طرف بالا هم‌کراندار باشد، در این صورت اصل تمامیت حکم می‌کند که دنباله، دارای یک کوچکترین کران بالای L باشد. بنا بر دلایل متعاقب، دنباله به سمت این lub همگرا خواهد بود: فرض کنید ε یک عدد مثبت دلخواه است. در این صورت $L - \varepsilon$ از L کوچکتر است، پس یک کران بالا برای دنباله نیست. بنابراین دست‌کم یک عنصر دنباله از $L - \varepsilon$ بزرگتر است

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{به‌ازای یک عدد صحیح و مثبت } N$$

در این صورت تمامی جملات بعدی دنباله از $L - \varepsilon$ بزرگترند؛ زیرا دنباله یکنوای افزایشی است

$$a_n > L - \varepsilon \qquad n > N\text{ ،}n\text{ به‌ازای هرعدد صحیح}$$

ازطرف دیگر، L یک کران بالای دنباله است، پس

$$a_n \leqslant L \qquad \text{به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت } n\text{، } n \geqslant ۱$$

بنابراین، به‌ازای هر $n \geqslant N$، داریم $L-\varepsilon < a_n < L$، ودرنتیجه $|a_n - L| < \varepsilon$. پس

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

همین طور، یك دنبالهٔ یکنوای کاهشی که از طرف پایین کراند باشد، به glb خود همگرا خواهد بود. (برای جزئیات اضافی و مثالهای بیشتر به‌قسمت "حد" مراجعه شود.)

ماکزیمم و مینیمم. اگر تابعی دارای ماکزیمم باشد، آنگاه آن ماکزیمم کوچکترین کران‌بالای برد تابع است. پس برای تابع $f_۳(x)$ درشکل ۲۴، برد عبارت است از

$$\{۳/۲\} \cup \{y : ۰ < y < ۱\}$$

وکوچکترین کران بالای آن ۳/۲ است. اگرتابعی دارای مینیمم باشد، آنگاه برد آن از طرف پایین کراندار است و بزرگترین کران پایین برد آن مقدار مینیمم تابع می‌باشد. بنابراین برد تابعی که دارای ماکزیمم و مینیمم است، کراندار است

$$(\text{کرانداری}) \Longleftarrow (\text{وجود ماکزیمم و مینیمم})$$

به‌عبارت دیگر کرانداری، یك شرط لازم برای وجود ماکزیمم و مینیمم است.

اثبات قضیهٔ I (صفحهٔ ۶۲) را به صورت زیرانجام می‌دهیم: (۱) نشان می‌دهیم که تحت فرضیات قضیه، برد تابع‌کراندار است. (۲) کوچکترین‌کران بالا و بزرگترین‌کران پایین‌برد تابع، متعلق به‌آن می‌باشند. وقتی (۱)و(۲) را اثبات‌کنیم،قضیه را اثبات‌کرده‌ایم.

از اینجا تا تکمیل اثبات قضیهٔ I، فرض می‌کنیم‌که a و b دوعدد حقیقی، $a < b$ و f درفاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته است. برای اثبات اینکه برد f روی تمامی دامنه،کراندار است (که اختصاراً، می‌گوییم "fکراندار است")، می‌توانیم از نقطهٔ a شروع کرده و یك فاصله از a تا $a+\delta_۱$ به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که به‌ازای xهای متعلق به آن، $f(x)$ در داخل فاصلهٔ به‌طول واحد از $f(a)$ قرارگیرد؛ نقطهٔ $x_۱$ را بین a و $a+\delta_۱$ انتخاب‌کرده و فاصلهٔ $x_۱$ تا $x_۱+\delta_۲$ را چنان انتخاب می‌کنیم‌که به‌ازای xهای متعلق به‌آن، $f(x)$ در داخل فاصله‌ای به‌طول واحد از $f(x_۱)$ قرارگیرد؛ واین عمل را، به‌همین ترتیب، به‌طرف راست ادامه می‌دهیم، نقطهٔ $x_{k+۱}$ را بین x_k و $x_k+\delta_{k+۱}$ انتخاب‌کرده و فاصلهٔ $x_{k+۱}$ تا $x_{k+۱}+\delta_{k+۲}$ را چنان در نظر می‌گیریم که به‌ازای xهای متعلق به‌آن $f(x)$ در داخل فاصلهٔ به طول واحد از $f(x_{k+۱})$ قرارگیرد. اگر به این ترتیب ادامه دهیم، فواصل رویهم افتاده‌ای به دست می‌آوریم‌که قسمتی از دامنهٔ بین a تا $x_k+\delta_{k+۱}$ را در $k+۱$ مرحله می‌پوشانند، و برای تمامی xهایی‌که دراین بخش از دامنه قراردارند، $f(x)$ داخل یك فاصلهٔ $k+۱$ واحدی از $f(a)$ قرار می‌گیرد. اگر مطمئن شویم که با این روند، با تعداد باپایانی مرحله، مثلاً M مرحله، به نقطهٔ انتهایی سمت راست b می‌رسیم، در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم‌که

به‌ازای تمامی xهایی که، $a \leqslant x \leqslant b$، داریم $f(a)-M < f(x) < f(a)+M$

و بدین‌ترتیب کراندار بودن برد f برقرار می‌شود. این روش دربارهٔ یك تابع به‌خصوصی می‌تواند به‌کار رود، ولـی برای یك اثبات عمومی، کافی به نظر نمی‌رسد. بخشی از این مشکل درابهامی نهفته است که در انتخاب نقاط $x_۱, x_۲, \ldots$ و δهای مربوطه وجود دارد.

تعدیلی از روش مشروحهٔ فوق، موفقتر خواهد بود. به‌جای تلاش در انتخاب تعداد باپایانی نقطه $a, x_۱, x_۲, \ldots$ و δهای مربوط به‌هرنقطه در روشی که شرح داده شد، یك δ-همسایگی برای هرنقطهٔ x متعلق به‌دامنهٔ f، براساس روش زیر می‌سازیم.

طبق تعریف پیوستگی و با انتخاب $\varepsilon = ۱$، می‌دانیم کـه برای هر x' متعلق به دامنهٔ $a \leqslant x' \leqslant b$، یك عدد مثبت $\delta' = \delta(x')$ وجود دارد به‌طوری که

(۱۰۹) اگر $\delta' > |x-x'|$ و $a \leqslant x \leqslant b$، آنگاه $|f(x)-f(x')| < ۱$

(به‌شکل۲۶ توجه کنید!) چون $0 < \delta'$.مسلماً فاصلهٔ باز $x'-\delta' < x < x'+\delta'$، به‌مرکز x'، نقطهٔ x' را می‌پوشاند. اکنون تمامی نقاط x'ای که از a تا b وجود دارند را درنظر می‌گیریم، این نقاط با فاصله‌های بازی از این گونه پوشیده شده‌اند. حتی نقاط انتهایی a و b با فواصل مربوطهٔ $a-\delta(a)<x<a+\delta(a)$ و $b-\delta(b)<x<b+\delta(b)$، پوشیده می‌شوند. درفاصلهٔ اخیر یعنی $a-\delta(a)<x<a+\delta(a)$، یا $|x-a|<\delta(a)$، تفاوت $f(x)$ از $f(a)$ از ۱ واحدکوچکتر است؛ یعنی

اگر $a \leqslant x \leqslant a+\delta(a)$، آنگاه $|f(x)-f(a)| < ۱$

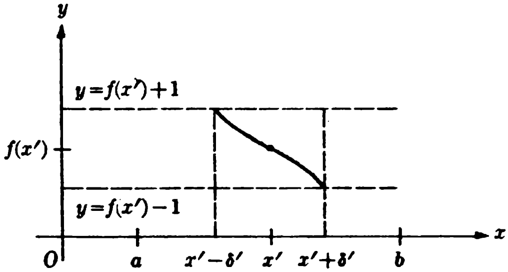
همین‌طور

اگر $b-\delta(b) < x \leqslant b$، آنگاه $|f(x)-f(b)| < ۱$

اجتماع تمامی زیرفاصله‌های از نوع

$$x'-\delta(x') < x < x'+\delta(x'), \qquad a \leqslant x' \leqslant b$$

یك "پوشش باز" برای دامنهٔ تابع f است. از آنجایی‌که دامنهٔ f، فاصلهٔ بسته و کراندار $a \leqslant x \leqslant b$ است، بنابرقضیهٔ هاین-برل (که اثبات آن به دنبال می‌آید) تعداد باپایانی از



شکل ۲۶

فـواصل $x'-\delta(x')<x<x'+\delta(x')$ وجـود دارند، کـه فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ را می‌پوشانند. فرض کنید که N تعداد فواصل در این پوشش باپایان، و $x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_N$ مراکز این فواصل باشند، به‌طوری که

$$a\leqslant x_{۱}<x_{۲}<\dots<x_n\leqslant b$$

دراین صورت، به‌ازای هرx $(a\leqslant x\leqslant b)$ یك x_k $(۱\leqslant k\leqslant N)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|x-x_k|<\delta(x_k)$$

بنابراین

$$|f(x)-f(x_k)|<۱$$

فرض کنیدکه M ماکزیمم اعداد

$$|f(x_{۱})|,\ |f(x_{۲})|, \dots, |f(x_N)|$$

است، در این صورت

به‌ازای تمامی xها، $a\leqslant x\leqslant b$، داریم $\qquad |f(x)|<M+۱$

بنابراین، با اثبات قضیهٔ هاین-برل در قسمت بعد، اثبات قضیهٔ زیر نیز کامل می‌شود.

قضیهٔ ۱۸. فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که در تمام دامنهٔ خود یعنی فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، a و b اعـداد حقیقی‌اند، پیوسته است. در این صورت برد f کراندار است.

حال به‌بینیم بافرض قضیهٔ۱۸، چگونه می‌توان آن را جهت اثبات قضیهٔ I، درمورد وجود ماکزیمم و مینیمم به‌کار برد.

قضیهٔ ۱۸، قضیهٔ I را نتیجه می‌دهد. گیریم فرضیات قضایای I و ۱۸ برقرار باشند. اگر R_f برد f باشد

$$R_f=\{y : y=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b\} \qquad (۲.۹)$$

آنگاه طبق قضیهٔ ۱۸، R_f کراندار است. فرض‌کنید U کوچکترین‌کران بالای R_f است. در این صورت هیچیك از اعداد

$$U-۱,\ U-\frac{۱}{۲},\ U-\frac{۱}{۳},\ \dots,\ U-\frac{۱}{n},\ \dots$$

کران بالای آن نیستند. از این‌رو برای هرعدد صحیح و مثبت n، x_nای متعلق به D وجود دارد به‌طوری که

$$f(x_n)>U-\frac{۱}{n}$$

با دنبالهٔ $x_1, x_2, \ldots$ کارکرده و عدد C متعلق به D را طوری به دست می‌آوریم که $.f(c)=U$

مجموعهٔ نقاط

$$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \qquad (۳.۹)$$

را در نظر می‌گیریم. تمامی این نقاط متعلق به D هستند. گرچه تعداد بی‌پایانی از xها با زیرنویسهای متفاوت در (۳.۹) وجود دارند، لیکن تعداد نقاط متمایز موجود درآن برای ما نامعلوم است. بنابراین دو حالت وجود دارد که می‌باید بررسی شود.

حالت۱. اگر S متشکل از تعداد باپایانی ازنقاط متمایز باشد، آنگاه دست‌کم یکی از xها به‌طور بی‌پایانی در دنبالهٔ $\{x_n\}$ تکرار شده است. یعنی برای یك عدد c، به‌ازای تعداد بی‌پایانی زیرنویس n، داریم $x_n=c$. بنابراین رابطهٔ

$$U \geqslant f(c)=f(x_n) > U-(1/n)$$

برای تعداد بی‌پایانی زیرنویس n، درست است. بدین ترتیب نتیجه می‌شود که برای آن دسته از nها، داریم

$$|f(c)-U| < 1/n \qquad (۴.۹)$$

واین رابطه تنها موقعی درست است که $f(c)=U$. درغیراین صورت، $|f(c)-U|>0$ و (۴.۹) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$n < 1/|f(c)-U|$$

که برای تعداد باپایانی از مقادیر مثبت و صحیح n درست است. بنابراین در حالت اول، یك عدد c متعلق به D وجود دارد به‌طوری‌که $f(c)=U$ بوده و f درنقطهٔ c دارای یك ماکزیمم می‌باشد.

حالت۲. اگر S متشکل از تعداد بی‌پایانی از نقاط متمایز باشد، آنگاه عددی مانند c متعلق‌به D وجود داردکه یك نقطهٔ انباشتگی برای S است. منظورمان ازنقطهٔ انباشتگی این است که هر همسایگی c شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط S است. (در قضیهٔ ۱۹ وجود چنین نقطهٔ c را اثبات می‌کنیم. فعلاً وجود چنین نقطه‌ای را می‌پذیریم و ادامه می‌دهیم.) برای چنین نقطهٔ انباشتگی c و هر $0<\delta$، همسایگی $N_\delta(c)$ شامل تعـداد بی‌پایانی از x_nهاست. از اینجا نتیجه می‌شود که $f(c)=U$؛ زیرا اگر $f(c)\neq U$، آنگاه می‌توان فرض کرد $\varepsilon=(1/2)(U-f(c))$، دراین صورت $0<\varepsilon$*. چون f در نقطهٔ c پیوسته است، پس یك $0<\delta$ وجود دارد به‌قسمی که

اگر $x\in D$ و $|x-c|<\delta$، آنگاه $\quad |f(x)-f(c)|<\varepsilon$

---

* یادآوری می‌کنیم که اگر $f(x)\neq U$ و $x\in D_f$، آنگاه $.f(x)<U$

اگر x برابر x_nهایی باشد که متعلق به $N_\delta(c)$ است، آنگاه

$$|f(x_n)-f(c)|<\varepsilon \qquad (۵.۹)$$

یا

$$f(c)-\varepsilon<f(x_n)<f(c)+\varepsilon$$

اما $f(x_n)>U-(۱/n)$، بنابراین برای آن تعداد بی‌پایان از مقادیر n، داریم

$$U-(۱/n)<f(x_n)<f(c)+\varepsilon$$

با ترتیب مجدد جملات، نتیجه می‌شود

$$U-f(c)-\varepsilon<۱/n$$

یا

$$۲\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon=(۱/۲)(U-f(c))<۱/n$$

یا برای تعداد بی‌پایانی از مقادیر صحیح و مثبت n، داریم

$$n<۲/(U-f(c)) \qquad (۶.۹)$$

ازآنجا که سمت راست رابطهٔ (۶.۹) مقداری ثابت است، لذا به‌تناقضی برمی‌خوریم که ناشی از فرض $f(c)\neq U$ است. بنابراین، فرض اولیه باید غلط باشد. پس $f(c)=U$ و f درنقطهٔ c دارای یك ماکزیمم است.

اثبات اینکه f دارای یك مینیمم است به‌طریق مشابهی دنبال می‌شود، و یا می‌توان آن را از وجود ماکزیمم برای تابع پیوستهٔ $f-$ نتیجه گرفت.

دراثبات بالا (قضیهٔ ۱۸، قضیهٔ I را نتیجه می‌دهد) هنوز یك نوع لنگی وجود دارد که عبارت است از وجود نقطهٔ انباشتگی. اکنون به‌اثبات آن قسمت می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱۹. (بولتسانو-وایرشتراس[1]). فرض کنید D فاصلهٔ بسته و کراندار $a\leqslant x\leqslant b$، و هم چنین S یك مجموعهٔ بی‌پایان از نقاط D باشد. در این صورت مجموعهٔ S دارای یك نقطهٔ انباشتگی در D است.

اثبات. طرح کلی اثبات چنین است: فاصلهٔ D را به دو نیمه تقسیم می‌کنیم. تعداد بی‌پایانی از نقاط S باید در یکی از این نیمه‌ها قرارگیرد. این نیمه را نیز به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، یکی ازاین دو نیمه باید دارای تعداد بی‌پایانی از نقاط S باشد. این روند را بینهایت بار ادامه می‌دهیم. بدین ترتیب یك دنباله از فاصله‌های تو در تو که بــه یك نقطه‌کاهش می‌یابند، تولید می‌شود. سپس ثابت می‌کنیم که آن یك نقطهٔ انباشتگی S است.

اکنون به‌جزئیات اثبات می‌پردازیم. دو زیرفاصلهٔ بسته از D را درنظر می‌گیریم

$$D': a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{۲}, \qquad D'': \frac{a+b}{۲}\leqslant x\leqslant b$$

---

1. Bolzano-Weierstrass

از آنجایی کـه S مشمول اجتماع D' و D'' است و یك مجموعهٔ بی‌پایان می‌بـاشد، لذا دست‌کم یکی ازاین دو زیرفاصلهٔ D' و D'' شامل نقاط بی‌پایانی از S می‌باشند. یکی را (مثلاً دست چپی را درصورتی‌که امکان انتخاب وجود داشته‌باشد) که دارای این خاصیت است انتخاب‌کرده وآن را D_1 و نقاط انتهایی آن را a_1 و b_1 می‌نامیم، که a_1 برابر a یا $(a+b)/2$ و b_1 برابر $(a+b)/2$ یا b است. در هرصورت، داریم

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$$

اکنون همین روش را با قرار دادن a_1 و b_1 به‌جـای a و b تکرار می‌کنیم. بدین ترتیب یك زیرفاصلهٔ کوچکتر D_2 که نصف D_1 است با نقاط انتهایی a_2 و b_2 به‌دست می‌آوریم، به‌طوری‌که D_2 شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط S بوده و داریم

$$a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1$$

اگراین روش را بینهایت بار تکرارکنیم، به‌یك دنبالهٔ تو درتو از زیرفاصله‌هایی‌که طول هرکدام نصف طول قبلی است، می‌رسیم به‌قسمی‌که

$$D_n = \{x : a_n \leqslant x \leqslant b_n\}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b \qquad (\text{۷.۹ الف})$$

و

$$b_n - a_n = (1/2)^n (b-a) \qquad (\text{۷.۹ ب})$$

نقاط انتهایی چپ، $a_1, a_2, \ldots$، یك دنبـالهٔ یکنوای افزایشی را تشکیل می‌دهند که از بالا توسط b کراندار است. چنین دنباله‌ای به‌کوچکترین کران بالای خود همگرا است. این حد را c می‌نامیم.

$$c = \lim_{n \to \infty} a_n = \operatorname{lub}\{a_1, a_2, \ldots\} \qquad (\text{۸.۹ الف})$$

به همین ترتیب، نقـاط انتهایی راست $b_1, b_2, \ldots$، یك دنبالـهٔ یکنوای کاهشی تشکیل می‌دهد‌که از پایین توسط a کراندار است. چنین دنباله‌ای به‌بزرگترین کران پایین خود همگراست. این حد را c' می‌نامیم

$$c' = \lim_{n \to \infty} b_n = \operatorname{glb}\{b_1, b_2, \ldots\} \qquad (\text{۸.۹ ب})$$

پس، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، اعداد صحیح N_1، N_2، N_3 وجود دارند به‌طوری‌که

$$|a_n - c| < \varepsilon/3 \qquad \text{اگر } n \geqslant N_1 \text{، آنگاه}$$

$$|b_n - c| < \varepsilon/3 \qquad \text{اگر } n \geqslant N_2 \text{، آنگاه}$$

و

اگر $n \geqslant N_{۳}$، آنگاه $\quad |a_n - b_n| < \varepsilon/۳$

بنابراین، اگر N ماکزیمم سه عدد $N_{۱}$، $N_{۲}$، $N_{۳}$ و $N \leqslant n$، آنگاه

$$\begin{aligned}|c-c'| &= |c-a_n+a_n-b_n+b_n-c'| \\ &\leqslant |c-a_n|+|a_n-b_n|+|b_n-c'| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}=\varepsilon\end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $c=c'$؛ چون در غیر این‌صورت، با انتخاب $\varepsilon = |c-c'|/۲$ به‌نتیجهٔ نادرست زیر می‌رسیم

$$|c-c'| < (۱/۲)|c-c'|$$

پس

(۸.۹ پ) $\qquad$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ $\qquad a_n \leqslant c = c' \leqslant b_n$

و وقتی n به‌سمت بینهایت میل می‌کند فاصله‌های تودرتوی D_n، به نقطهٔ c جمع می‌شوند.

آیا c یك نقطهٔ انباشتگی S است؟ به عبارت دیگر، آیا هر همسایگی c شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط S است؟ برای پاسخگویی به این سؤال، یك همسایگی دلخواه $N_h(c)$ را، در نظر می‌گیریم که در آن h یك عدد مثبت دلخواه است. برای مقدار به اندازهٔ کافی بزرگ n، طول D_n از h کوچکتراست؛ زیرا

(۹.۹ الف) $\qquad b_n - a_n = (۱/۲)^n (b-a) < h$

اگر

(۹.۹ ب) $\qquad ۲^n > (b-a)/h$

هر عدد درست n، که در نابرابری (۹.۹ ب) صدق کند را انتخاب می‌کنیم. در این صورت همسایگی $N_h(c)$ شامل تمامی نقاط D_n است؛ زیرا بنابر (۸.۹ پ) و (۹.۹ الف) داریم

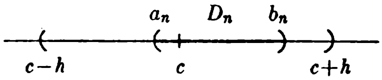
$$c-h < b_n - h < a_n$$

و

$$c+h \geqslant a_n + h > b_n$$

این وضعیت، در حالتی که (۹.۹ب) برقرار می‌شود در شکل ۲۷ نشان داده شده است.

بالاخره، بنا برآنچه گذشت، هر زیرفاصلهٔ $D_{۱}, D_{۲}, \ldots$ شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط S است؛ بنابراین $N_h(c)$ نیز شامل تعداد بی‌پایانی از نقاط S می‌باشد. بنابراین، c



شکل۲۷. اگـر $2^n > b-a/k$، آنـگاه فاصلهٔ D_n مشمول $N_h(c)$ است.

یك نقطهٔ انباشتگی S است. هم‌چنین از(۸.۹ پ) و(۷.۹ الف) روشن‌می‌شود که c به‌فاصلهٔ کراندار و بستهٔ اولیهٔ D متعلق است. بدین ترتیب اثبات قضیه تمام است.

تمرین

با فرض قضیهٔ ۱۸، از فرضیات قضیهٔ I نتیجه بگیرید که f دارای یك مینیمم است.

۱۰. قضیهٔ پوششی هاین-برل

در بخش۹ به‌قضیهٔ هاین-برل اشاره‌ای کرده و از آن استفاده کردیم. در این بخش نخست به‌چند مثال در این مورد می‌پردازیم و سپس قضیه را اثبات می‌کنیم.

مثال۱. فرض کنید

$$S=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

یك خانواده از همسایگیهای $N_1, N_2, \dots$ را درنظر می‌گیریم؛ به هر عـدد در S یك همسایگی به‌طریق زیر متناظر می‌کنیم:

$N_1 : \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$، که ۱ را می‌پوشاند،

$N_2 : \frac{1}{2}-\frac{1}{12} < x < \frac{1}{2}+\frac{1}{12}$، کـه $\frac{1}{2}$ را می‌پوشاند،

$N_3 : \frac{1}{3}-\frac{1}{24} < x < \frac{1}{3}+\frac{1}{24}$، کـه $\frac{1}{3}$ را می‌پوشاند،

$\vdots$

$N_n : \frac{1}{2}-\frac{1}{2n(n+1)} < x < \frac{1}{n}+\frac{1}{2n(n+1)}$، که $\frac{1}{n}$ را می‌پوشاند،

همسایگی N_n، یك فاصلهٔ به‌مرکز $1/n$ و به‌شعاع

$$h=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)=\frac{۱}{۲n(n+۱)}$$ *

است. بنابراین N_n شامل $۱/n$ بوده ولی شامل $۱/(n-۱)$ یا $۱/(n+۱)$ نیست. اکنون اجتماع همهٔ این همسایگیها

$$N_۱\cup N_۲\cup\cdots\cup N_n\cup\cdots$$

یك مجموعهٔ باز است که شامل S بوده و یا آن را میپوشاند. خانوادهٔ مجموعههای $N_۱, N_۲, \ldots$ را یك پوشش باز S مینامند.

تعریف۷. فرض کنید S یك مجموعه از اعداد حقیقی باشد. عدد c را یك نقطهٔ درونی S می‌گویند هرگاه S شامل یك همسایگی $N_h(c)$ باشد. اگرهر نقطهٔ S یك نقطهٔ درونی آن باشد، آنگاه S یك مجموعهٔ باز نامیده میشود.

مثال۲. فرض کنید S مجموعهٔ اعداد حقیقی x است بهطوری که $۰<x<۱$ (آنچه که فاصلهٔ باز نامیدهایم). دراین صورت S یك مجموعهٔ باز است؛ زیرا، اگر c متعلق به S و

$$h=\min(c,\ ۱-c)$$

باشد، آنگاه $h>۰$ و $N_h(c)$ یك همسایگی c است که تماماً مشمول S میباشد.

تعریف۸. پوشش باز. فرض کنید S یك مجموعه ازاعداد حقیقی است. فرض کنید $\mathscr{C}$ یك خانواده از مجموعههای باز $S_۱, S_۲, \ldots$ است که اجتماع آنها S را در بر دارد. در اینصورت $\mathscr{C}$ یك پوشش باز S نامیده میشود.

توضیح. اگر S یك مجموعهٔ کراندار باشد بهطوری که $\alpha=\mathrm{glb}(S)$ و $\beta=\mathrm{lub}(S)$، آنگاه فاصلهٔ باز $\alpha-۱<x<\beta+۱$ یك پوشش باز S است. بنابراین یك مجموعهٔ کراندارهمیشه دارای یك پوشش باز است که ازیك فاصلهٔ باز تشکیل میشود. درحقیقت، اگر S یك مجموعهٔ دلخواه ازاعداد حقیقی، و $S_۱$ مجموعهٔ تمامی اعداد حقیقی باشد، آنگاه $S_۱$ یك پوشش باز برای S خواهد بود. یا، به هر عدد گویای r، فاصلهٔ باز $r-h<x<r+h$، که در آن h هرعددگویایی بین صفر و یك ($۰<h<۱$) است، متناظر شود. بنابراین، بهازای هر r، تعداد بیپایانیهمسایگی که متناظر بهتعداد بیپایانی از مقادیر مثبت h هستند، وجود دارد. و چون r عددیگویا ومجموعهٔ اعدادگویا بیپایان است، لذا تعداد بیپایانی از مقادیر r وجود دارند. خانوادهٔ همسایگیهای $N_h(r)$، که در آن r و h اعدادی گویا و $۰<h<۱$ است، مجموعهٔ اعداد حقیقی را میپوشانند، لذا هر زیرمجموعه از اعداد حقیقیرا نیزخواهد پوشاند. بنابراین پوششهای باز همیشه وجود دارند. یك پوشش باز ممکناست یك خانوادهٔ باپایان، یا بیپایانازمجموعههایباز باشد. قضیهٔ هاین-برل، بهاین پرسش پاسخ میدهدکه: آیا میتوان یك پوشش باز باپایان ازیك

---

* بنابراین، میتوانیم بنویسیم $N_n=N_h(۱/n)$.

پوشش باز داده شده استخراج کرد؟ در مثال ۱ بالا، اگر هر یک از همسایگیهای $N_h(۱/n)$ را $(h=(۱/۲n(n+۱))$ حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌های باز باقیمانده، نقطهٔ $۱/n$ را نمی‌پوشانند. بنا بر این، هیچ خانوادهٔ باپایانی از پوشش داده شدهٔ $N_۱, N_۲, \ldots$ نمی‌تواند پوششی برای S باشد. به عبارت دیگر، از پوشش باز داده شده در مثال ۱، نمی‌توان یك خانوادهٔ باپایان انتخاب کرد که باز هم مجموعهٔ S را بپوشاند.

مثال۳. فرض کنید S مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۱/۲, ۱/۳, \ldots, ۱/n, \ldots\}$ است. همانند مثال ۱، $۱/n$ را با فاصلهٔ $N_n = N_h(۱/n)$ می‌پوشانیم $(h = ۱/۲n(n+۱))$. فواصل $N_۱, N_۲, \ldots$، ۰ را نمی‌پوشانند؛ لذا یك مجموعهٔ باز $S_۰$ شامل ۰ اضافه می‌کنیم. دراین صورت $S_۰$ و $N_۱, N_۲, \ldots$ تشکیل یك پوشش باز برای S می‌دهند. از این پوشش باز، مطابق آنچه به دنبال می‌آید، می‌توانیم یك پوشش باز باپایان استخراج کنیم. چون ۰ یك نقطهٔ درونی $S_۰$ است لذا عدد مثبت $h_۰$ای وجود دارد به‌قسمی که فاصلهٔ $-h_۰ < x < h_۰$ مشمول $S_۰$ باشد. اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آنگاه فاصلهٔ $-h_۰ < x < h_۰$ شامل اعداد $۱/n$ خواهد بود. در واقع، کافی است n بزرگتر از $۱/h_۰$ باشد. فرض کنید k بزرگترین جزء صحیح $۱/h_۰$، یعنی $k=[۱/h_۰]$، باشد. در این صورت $S_۰$، و $N_۱, N_۲, \ldots, N_k$ یك پوشش باز باپایان برای S است. (برای مثال، اگر $h_۰ = ۰٫۰۰۳$، آنگاه $۱/h_۰ = ۱۰۰۰/۳ = ۳۳۳\frac{۱}{۳}$، و $k = ۳۳۳$، و در این صورت ۳۳۴ مجموعهٔ $S_۰, N_۱, N_۲, \ldots, N_{۳۳۳}$ یك پوشش باز S می‌باشند. و بدین ترتیب از مجموعه‌های باقیمانده $N_{۳۳۴}, \ldots$ خلاص می‌گردیم، زیرا اعداد متناظر با آنها، $۱/۳۳۴, ۱/۳۳۵, \ldots$ توسط مجموعهٔ باز $S_۰$ که شامل فاصلهٔ $-۰٫۰۰۳ < x < ۰٫۰۰۳$ می‌باشد، پوشیده می‌شوند.)

علت اینکه مثال۳ با مثال ۱ متفاوت است، این است که مجموعهٔ S در مثال۱ شامل نقطهٔ انباشتگی ۰ نیست، در صورتی که در مثال ۳، S شامل این نقطه می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر در مثال ۳، مجموعهٔ S بسته است.

تعریف ۹. یك مجموعه بسته است اگر شامل تمامی نقاط انباشتگی خود باشد.

مثال۴. فرض کنید S فاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ است. هر نقطهٔ x خارج از مجموعهٔ S دارای یك فاصلهٔ مینیمم از S است که اگر $x < ۰$، این فاصله برابر است با $|x|$ و اگر $x > ۱$، برابر است با $x - ۱$. هر همسایگی x به‌شعاع کوچکتر از این فاصلهٔ مینیمم، شامل هیچ نقطه‌ای از S نیست. بنا براین، چنین نقطهٔ xای که در S نیست، یك نقطهٔ انباشتگی S نمی‌باشد. پس S شامل تمامی نقاط انباشتگی خود بوده و بنا براین مجموعه‌ای است بسته. این مطلب، با شیوهٔ معمول ما، که چنین فاصله‌ای را یك فاصلهٔ بسته می‌نامیم منطبق است.

قضیهٔ ۲۰ (هاین-برل). فرض کنید S یك مجموعهٔ بسته و کراندار از اعداد حقیقی بوده و $\mathscr{C}$ یك پوشش باز S باشد. در این صورت تعداد باپایانی از مجموعه‌های باز $\mathscr{C}$، S را می‌پوشانند.

اثبات. چون S کراندار است، لذا اعداد حقیقی $\alpha=\text{glb}(S)$ و $\beta=\text{lub}(S)$ وجود دارند. قضیه را به‌طورغیرمستقیم اثبات می‌کنیم؛ به‌این معناکه فرض می‌کنیم که هیچ تعداد باپایانی از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ وجود نداشته باشند که S را بپوشانند، در این‌صورت نشان می‌دهیم که این امر به‌تناقض می‌انجامد. بنابراین فرض‌کنیدکه S نتواند توسط هیچ تعداد باپایانی از عناصر $\mathcal{C}$ پوشیده شود.شبیه اثبات قضیهٔ بولتسانو- وایرشتراس، مجموعهٔ S را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: یکی قسمت سمت چپ که بخشی از زیر فاصلهٔ $\alpha \leqslant x \leqslant (\alpha+\beta)/۲$، و دیگری قسمت سمت راست‌که بخشی از زیر فاصلهٔ $(\alpha+\beta/۲) \leqslant x \leqslant \beta$ است. اگر هردوی این‌قسمتها توسط تعداد باپایانی از عناصر $\mathcal{C}$ پوشیده شوند، آنگاه S نیز دارای چنین خاصیتی خواهد بود. بنابراین، دست‌کم یکی از این دو قسمت دارای چنین پوشش باپایانی نیست. فرض‌کنید فاصلهٔ $\alpha_۱ \leqslant x \leqslant \beta_۱$ زیر فاصلهٔ مزبور باشد (اگرامکان انتخاب وجود داشته باشد، زیرفاصلهٔ سمت چپ را انتخاب کنید!). اکنون این روند را مطابق آنچه در قضیهٔ ۱۹ آمده، با در نظرگرفتن قسمتهای S در زیرفاصله‌های جدید $\alpha_۱ \leqslant x \leqslant (\alpha_۱+\beta_۱)/۲$ و $(\alpha_۱+\beta_۱)/۲ \leqslant x \leqslant \beta_۱$، تکرار می‌کنیم. مطابق فرضی‌که کرده‌ایم، حداقل یکی از این دو زیرفاصله (در صورت انتخابی بودن، زیرفاصلهٔ سمت چپی) دارای هیچ پوشش باپایانی از عناصر $\mathcal{C}$ نیست. این‌روند را به‌طور بی‌پایانی‌ادامه می‌دهیم. به‌ازای هرعدد صحیح ومثبت k، زیرفاصلهٔ $\alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k$ شامل قسمتی از S است که توسط هیچ تعداد باپایانی از مجموعه‌های باز $\mathcal{C}$ پوشیده نمی‌شود، همین خاصیت در مورد، دست‌کم، یکی از دو زیر فاصلهٔ $\alpha_k \leqslant x \leqslant (\alpha_k+\beta_k)/۲$ و $(\alpha_k+\beta_k)/۲ \leqslant x \leqslant \beta_k$ باید درست باشد. یکی از این زیرفاصله‌ها راکه دارای همین خاصیت است (در صورت انتخابی بودن، سمت چپی را) انتخاب‌کرده ونقاط انتهایی‌آن را $\alpha_{k+۱}$ و $\beta_{k+۱}$ می‌نامیم. از روش‌ساختن‌این‌زیرفاصله‌ها برمی‌آیدکه زیرفاصله‌ها تودرتو بوده و طول هرکدام نصف طول فاصلهٔ ماقبل خود است

$$\alpha \leqslant \alpha_۱ \leqslant \alpha_۲ \leqslant \cdots \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_{k+۱} < \beta_{k+۱} \leqslant \beta_k \leqslant \cdots \beta_۲ \leqslant \beta_۱ \leqslant \beta \quad (۱.۱۰)$$

و

$$\beta_۲-\alpha_۲=\frac{۱}{۲}(\beta_۱-\alpha_۱)=\frac{۱}{۴}(\beta-\alpha)$$

$$\beta_۳-\alpha_۳=\frac{۱}{۲}(\beta_۲-\alpha_۲)=\frac{۱}{۸}(\beta-\alpha)$$

یا به‌طور کلی

$$\beta_k-\alpha_k=۲^{-k}(\beta-\alpha) \quad (۲.۱۰)$$

درست شبیه آنچه دراثبات قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس گفته شد، یك عدد c وجود دارد به‌طوری‌که

$$c=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\text{lub}\{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots\} \quad (۳.۱۰)$$

$$c=\lim_{n\to\infty}\beta_n=\operatorname{glb}\{\beta_1,\beta_2,\dots\} \tag{۴.۱۰}$$

$$\alpha\leqslant c\leqslant\beta$$

و c یك نقطهٔ انباشتگی S است.[۱] بـر طبق فرض، S بسته است و چون بنا بر تعریف، یك مجموعهٔ بسته شامل تمامی نقاط انباشتگی خود است؛ لذا، c متعلق به S است. اینجاست که به تناقض می‌رسیم. چون c متعلق به S است پس توسط یك مجموعهٔ باز از $\mathcal{C}$ پوشیده می‌شود، این مجموعهٔ باز را S_0 می‌نامیم. چون S_0 باز است، پس تمامی نقاط آن، نقاط درونی است. بنا بر این یك همسایگی $N_h(c)$ مشمول S_0 وجود دارد. اما برای تمامی مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ k، از معادلات (۳.۱۰) و (۴.۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\alpha_k>c-h \quad \text{و} \quad \beta_k<c+h$$

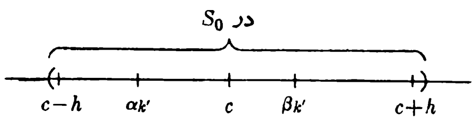
یکی از این مقادیر k را انتخاب کرده و k' می‌نامیم. تناقض این است:

از یك طرف، فاصلهٔ $\alpha_{k'}\leqslant x\leqslant\beta_{k'}$ توسط مجموعهٔ S_0 از $\mathcal{C}$ پوشیده می‌شود و برای آن قسمتی از S کـه در این فاصلـه قرار دارد نیز این مطلب درست است، زیرا $[\alpha_{k'},\beta_{k'}]\subset N_h(c)\subset S_0$ است.

اما

از طرف دیگر، قسمتی از S کـه در $[\alpha_{k'},\beta_{k'}]$ واقع است، نمی‌تواند توسط هیچ تعداد باپایانی از عناصر $\mathcal{C}$ پوشیده شود.

بنا براین، فرض اینکه "هیچ تعداد باپایانی از عناصر $\mathcal{C}$، S را نمی‌پوشانند" به این تناقض منجر می‌شود، لذا، فرض مخالف آن باید درست باشد.



شکل۲۸

مثال۵. فرض کنید $f(x)=x^2$، $0\leqslant x\leqslant 2$. اگر x_1 و x_2 دوعدد حقیقی تقریباً مساوی باشند، انتظار داریم که مربع آنها نیز تقریبـاً برابر باشند. برای توضیح بیشتر، فرض کنید $0\leqslant x_1\leqslant 2$ عـددی ثابت است. سعی مـا بر این است کـه یك همسایـگی $x_1-h<x<x_1+h$، به‌مرکز x_1، به‌دست آوریم به‌طوری که به‌ازای تمامی مقادیر x واقع در این همسایگی، داشته باشیم $|x^2-x_1^2|<0.01$. با تجزیهٔ $x^2-x_1^2$ نتیجه می‌شود

---

۱. اگر یك زیرفاصلهٔ $[\alpha_k,\beta_k]$، از تعداد باپایانی از نقاط S تشکیل شده باشد، آن قسمت از S باید توسط تعداد باپایانی ازعناصر $\mathcal{C}$ پوشیده شود.

$$|x^۲-x_۱^۲| = |(x+x_۱)(x-x_۱)| = |x+x_۱||x-x_۱|$$
$$< ۴|x-x_۱|, \qquad ۰\leqslant x,\ x_۱\leqslant ۲$$

بنا بر این، $|x^۲-x_۱^۲| < ۰٫۰۱$ اگر

$$|x-x_۱| < \frac{۰٫۰۱}{۴} = ۰٫۰۰۲۵, \qquad ۰\leqslant x,\ \leqslant x_۱ ۲$$

بنا بر این، اگر $h=۰٫۰۰۲۵$ و $۰\leqslant x_۱\leqslant ۲$، می‌توانیم مطمئن باشیم که هرگاه $x\in N_h(x_۱)$ و $۰\leqslant x_۱\leqslant ۲$، آنگاه اختلاف $x^۲$ و $x_۱^۲$ از ۰٫۰۱ کمتر است. فرض کنید $\mathscr{C}$ مجموعهٔ تمامی این همسایگیهای (باز) $N_h(x_۱)$، $۰\leqslant x_۱\leqslant ۲$ باشد. به‌ازای هر $x_۱$، $۰\leqslant x_۱\leqslant ۲$، یك چنین همسایگی $N_h(x_۱)$ ای وجود دارد، و اگر $x_۱$ بین ۰ و ۲ تغییر کند تعداد بی‌پایانی از این همسایگیها خواهیم داشت. $\mathscr{C}$ یك پوشش باز برای فاصلهٔ بسته و کراندار S، $۰\leqslant x\leqslant ۲$، خواهد بود. طبق قضیهٔ هاین-برل یك تعداد باپایانی از همسایگیهای متعلق به $\mathscr{C}$ وجود دارند که S را می‌پوشانند. دراین مثال به‌سادگی می‌توان چنین پوشش باپایانی را مشخص کرد. برای مثال، ۱۶۰۰ همسایگی به‌مراکز

$$\frac{h}{۲},\ h,\ \frac{۳h}{۲},\ ۲h,\ \frac{۵h}{۲},\ \dots,\ ۸۰۰h, \qquad h=۰٫۰۰۲۵$$

تشکیل چنین پوشش باز باپایانی را می‌دهد؛ زیرا، همسایگی به‌شعاع $h=۰٫۰۰۲۵$ و

به‌مرکز	فاصلهٔ زیر را می‌پوشاند
$\frac{h}{۲}$	$-\frac{h}{۲}<x<\frac{۳h}{۲}$
h	$۰<x<۲h$
$\frac{۳h}{۲}$	$\frac{h}{۲}<x<\frac{۵h}{۲}$
$۲h$	$h<x<۳h$
$\vdots$	$\vdots$
$۸۰۰h=۲$	$۷۹۹h<x<۸۰۱h$

اجتماع این همسایگیها، تماماً S را می‌پوشانــد. (این همسایگیها رویهم قرار می‌گیرند. لــذا اکثر نقاط S دوبــار پوشیده می‌شوند، و این دوبــار پوشیده شدن بعضی از نقــاط اجتناب‌ناپذیر است. در هرحال موفق شده‌ایم یك گردآوردهٔ باپایان از گردآوردهٔ بی‌پایان $\mathscr{C}$ استخراج کنیم که S را به‌پوشانند.)

توضیح. اثبات دیگری برای قضیه ۱۸. قضیهٔ هاین-برل را به‌کار برده‌ایم تا نشان دهیم که برد یك تابع پیوسته، به‌شرطی که دامنه‌اش یك فاصلهٔ بسته و کراندار باشد، کراندار است. با استفاده از دنباله‌ها و برهان خلف اثبات دیگری برای این قضیه، امکان‌پذیر است. پس، فرض می‌کنیم تابع f یك تابع حقیقی‌و روی‌دامنهٔ خود، $a \leqslant x \leqslant b$، همه‌جا پیوسته باشد، اما (برخلاف آنچه که قضیهٔ ۱۸ ادعا می‌کند) فرض می‌کنیم که برد f کراندار نباشد. وقتی که این فرض، به‌تناقضی منجر شود، نتیجه می‌گیریم که برد f کراندار است. اکنون، اگر برد f کراندار نباشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $x_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(x_۱)| > ۲$$

و نقطه‌ای مانند $x_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(x_۲)| > ۲|f(x_۱)| > ۲^۲$$

و به همین ترتیب، برای هر عدد صحیح و مثبت $n \geqslant ۲$، نقطه‌ای مانند x_n وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(x_n)| > ۲|f(x_{n-۱})| > ۲^n$$

نقاط $x_۱, x_۲, \ldots$، همگی متعلق به‌دامنهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ بوده و جملگی ازهم متمایزند؛ زیرا اگر $n < m$، آنگاه $|f(x_n)| < |f(x_m)|$. طبق قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس، مجموعهٔ

$$S = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$$

دارای یك نقطهٔ انباشتگی c متعلق به دامنهٔ f است. چون f در نقطهٔ c پیوسته است، لذا، یك $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $a \leqslant x \leqslant b$ و $|x-c| < \delta$، آنگاه $\qquad |f(x) - f(c)| < ۱$

از اینجا نتیجه می‌شود که

اگر $a \leqslant x \leqslant b$ و $|x-c| < \delta$، آنگاه $\qquad |f(x)| < ۱ + |f(c)|$

بنابراین، $|f(x)|$، به‌ازای xهای متعلق به $N_\delta(c)$، کراندار است. اینجاست که تناقض آشکار می‌شود، زیرا: c یك نقطهٔ انباشتگی $\{x_۱, x_۲, \ldots\}$ است وهمسایگی $N_\delta(c)$ شامل تعدادبی‌پایانی‌ازاین‌نقاط x_n است‌که $|f(x_n)| > ۲^n$. بنابراین $\{|f(x_n)| : x_n \in N_\delta(c)\}$ کراندار نیست. بدین‌ترتیب برهان خلف تکمیل‌می‌شود و درنتیجه فرض اولیه‌که برد تابع f کراندار نیست نادرست است.

تمرینها

۱. درمثال ۵ بالا، با فرض $h = ۰٫۰۰۲۵$ و $r = h/۲$، همسایگیهایی با شعاع h ومراکز

$r, ۲r, ۳r, \ldots, ۱۶۰۰r$ را برای پوشاندن S به‌کار بردیم. اگر (به‌جای $r = h/۲$) قرار می‌دادیم $r = ۰٫۹h$، و همسایگیهای به شعاع h و به مراکز $r, ۲r, \ldots, nr$ را مورد استفاده قرار می‌دادیم، n را چه مقداری باید می‌گرفتیم تا S کاملاً[۴] پوشیده شود؟

۰.۲ (تعدیلی از مثال ۰.۵) فرض کنید (به‌جای $|x^۲ - x_۱^۲| < ۰٫۰۱$) همسایگیهایی را در نظر بگیریم که به‌ازای آنها $|x^۲ - x_۱^۲| < ۰٫۰۲$ و $۰ \leqslant x_۱ \leqslant ۵$ و $۰ \leqslant x \leqslant ۵$. مقدار مناسبی برای h به‌دست آورید به‌طوری‌که

$$\text{اگر } |x - x_۱| < h \text{ و } ۰ \leqslant x \leqslant ۵ \text{ و } x_۱ \leqslant ۵\text{، آنگاه} \qquad |x^۲ - x_۱^۲| < ۰٫۰۲$$

فرض کنید $\mathscr{C}$ خانوادهٔ تمامی همسایگیهای $N_h(x_۱)$ باشد $(۰ \leqslant x_۱ \leqslant ۵)$. یك خانوادهٔ باپایان از $\mathscr{C}$ را مشخص کنید که فاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۵$ را بپوشاند. [راهنمایی: فاصله‌هایی به‌مرکز $۰, h, ۲h, \ldots, ۵$ را امتحان کنید.]

۱۱. پیوستگی یکنواخت

در شرط ε-δ، برای پیوستگی، گاهی بـه ازای یك ε داده شده، یك δ یافت می‌شود که برای تمامی نقاط واقع در دامنهٔ تابع، شرط پیوستگی را براورده می‌سازد. به‌عنوان مثال، برای تابع خطی $f(x) = mx + b$ درمثال ۷ از بخش ۷، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ داده شده، می‌توانیم δ را برطبق رابطهٔ زیر

$$\delta = \varepsilon/(۱ + |m|)$$

به‌کار برده و مطمئن باشیم که

$$|x_۱ - x_۲| < \delta \implies |f(x_۱) - f(x_۲)| < \varepsilon$$

مقدار δ بستگی به‌انتخاب $x_۱$ یا $x_۲$ ندارد و مستقل از تمامی نقاط واقع در دامنهٔ تابع f به‌دست می‌آید. این مطلب، مفهوم پیوستگی یکنواخت را نشان می‌دهد.

تعریف ۰.۱۰ پیوستگی یکنواخت. فرض کنید تابع حقیقی f درمجموعهٔ D از اعداد حقیقی تعریف شده است. اگر به‌هرعدد مثبت ε یك عدد مثبت δ متناظر شود به‌طوری‌که اگر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به‌دامنهٔ f بوده و

$$|f(x_۱) - f(x_۲)| < \varepsilon \qquad \text{(۱.۱۱ الف)}$$

آنگاه

$$|x_۱ - x_۲| < \delta \qquad \text{(۱.۱۱ ب)}$$

دراین صورت، می‌گوییم f در D پیوستهٔ یکنواخت است.

مثال ۰.۱ فرض کنید D فاصلهٔ زیراست

$$D : -۲ \leqslant x \leqslant ۲ \qquad \text{(۲.۱۱ الف)}$$

و $f(x)=x^۲$. همچنین فرض کنید که $\varepsilon > ۰$ نیز داده شده است. از شرط (۱۰۱۱ ب) نتیجه می‌شود که

$$|x_۱^۲-x_۲^۲|=|x_۱+x_۲|\;|x_۱-x_۲|<\varepsilon \qquad \text{(۲.۱۱ ب)}$$

اگر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به D باشند، آنگاه

$$|x_۱+x_۲|\leqslant|x_۱|+|x_۲|\leqslant ۴$$

بنابراین

$$|x_۱+x_۲|\;|x_۱-x_۲|\leqslant ۴|x_۱-x_۲|$$

پس، اگر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به D و

$$۴|x_۱-x_۲|<\varepsilon$$

یا

$$|x_۱-x_۲|<\varepsilon/۴$$

باشد شرط پیوستگی براورده می‌شود، بنابراین، به هر $\varepsilon>۰$، یك عدد $\delta>۰$ برابر $\varepsilon/۴$ متناظر می‌شود به‌طوری که

اگر $|x_۱-x_۲|<\delta$ و $|x_۱|\leqslant ۲$ و $|x_۲|\leqslant ۲$، آنگاه $\qquad |x_۱^۲-x_۲^۲|<\varepsilon$

بنابراین تابع

$$f(x)=x^۲, \qquad -۲\leqslant x\leqslant ۲$$

در دامنهٔ خود پیوستهٔ یکنواخت است؛ زیرا همان $\delta=\varepsilon/۴$ برای تمامی نقاط x متعلق به دامنهٔ تابع، شرط پیوستگی را براورده می‌سازد.

مثال ۲. فرض کنید(مانندمثال۱) $f(x)=x^۲$، ولی دامنهٔ آن تمام اعداد حقیقی باشد

$$D=\{x : -\infty < x < +\infty\}$$

فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده است و می‌خواهیم عدد $\delta > ۰$ را طوری به‌دست آوریم که

$$|x_۱^۲-x_۲^۲|=|x_۱+x_۲|\;|x_۱-x_۲|<\varepsilon \qquad \text{(۳.۱۱ الف)}$$

اگر

$$|x_۱-x_۲|<\delta \qquad \text{(۳.۱۱ ب)}$$

چون D کراندار نیست، لذا ممکن است عامل $|x_۱+x_۲|$ نیز کراندار نباشد. عدد مثبت δ هر چه باشد می‌توان $x_۱$ و $x_۲$ را به فاصلهٔ δ از یکدیگر اما به‌قدر کافی بزرگ انتخاب

کرد به‌طوری که رابطهٔ (۳.۱۱ الف) نادرست باشد. به‌عنوان مثال فرض کنید

$$x_1 - x_2 = \frac{\delta}{2}$$

و

$$x_2 = \frac{2\varepsilon}{\delta}, \qquad x_1 = \frac{2\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

دراین صورت $|x_1 - x_2| < \delta$ است، ولی

$$|x_1^2 - x_2^2| = \left(\frac{4\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}\right) > \frac{4\varepsilon\delta}{2\delta} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

توضیح. مثال ۲، تفاوت بین دو مفهوم "همه جا پیوسته" و "پیوستهٔ یکنواخت" را نشان می‌دهد. تابع $f(x) = x^2$، $-\infty < x < \infty$، همه جا پیوسته است. یعنی برای هرعدد حقیقی x_1 وهرعدد مثبت ε، عدد حقیقی ومثبت δ رامطابق رابطهٔ زیرمی‌توان به‌دست آورد

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_1|}\right) \qquad (\text{۴.۱۱ الف})$$

به‌طوری که

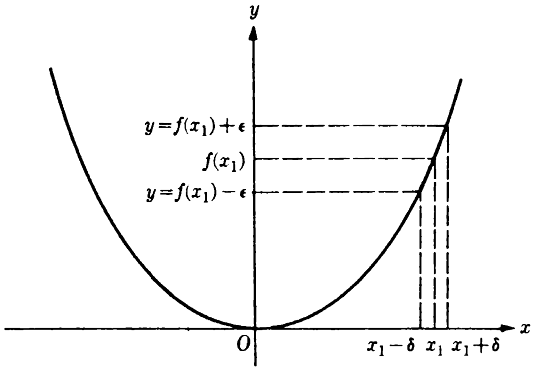
$$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon \qquad \text{آنگاه}\ ،|x_1 - x_2| < \delta\ \text{اگر} \qquad (\text{۴.۱۱ ب})$$

ولی عدد δ که توسط رابطهٔ (۴.۱۱ الف) معرفی شده، به x_1 و ε بستگی دارد. ترتیب اتفاقات مهم است: اگر علاوه بر $0 < \varepsilon$، x_1 نیز داده شده باشد، آنگاه می‌توان $0 < \delta$ را از (۴.۱۱الف) به‌دست آورد که در (۴.۱۱ب) صدق کند. ولی اگر $0 < \varepsilon$ داده شده باشد و هیچ محدودیتی روی x_1 و x_2 به جز نزدیکی به هم وجود نداشته باشد، نمی‌توان عدد $0 < \delta$ را که فقط به ε بستگی داشته باشد، به‌دست آورد که در (۴.۱۱ ب) صدق کند. با این وجود اگردامنهٔ f را طوری محدود کنیم کــه $|x_1|$ در (۴.۱۱الف) کراندار باشد، مثلاً $|x_1| \leqslant M$، آنگاه

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 2M}\right) \qquad (\text{۴.۱۱ پ})$$

را می‌توان به‌جای (۴.۱۱ الف) به‌کار برد. عــدد داده شده به‌وسیلهٔ (۴.۱۱ پ) دیگر به نقطهٔ x_1 (یا x_2) بستگی ندارد، و اگر دامنهٔ تابع به $|x| \leqslant M$ محدود شود، آنگاه شرط (۴.۱۱ ب) را براورده می‌سازد.

آنچه که از تحلیل فوق برمی‌آید این است: اگــر دامنهٔ تابع به‌طور مناسبی محدود شود، در میان δهایی که توسط (۴.۱۱ الف) به‌دست می‌آیند، کوچکترینی وجود خواهد داشت؛ یــا حداقل δی مناسبی وجود خواهد داشت، مثلاً δای که بــه بزرگترین $|x_1|$



شکل ۲۹. اگر $f(x)=x^2$، و $\varepsilon>0$، در آن‌صورت δ همسایگی به مرکز x_1 که برای برقراری $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$ لازم است، با بزرگ شدن x_1، به دلیل شیب زیاد منحنی، کوچکتر می‌شود.

مربوط می‌شود، می‌توانیم آن را به‌کار بریم. اما وقتی که دامنه متشکل از تمامی اعداد حقیقی باشد، دیگر $|x_1|$ بزرگترینی نخواهد داشت و درنتیجه‌کوچکترین $\delta>0$ ای نیز به دست نمی‌آید که در (۴.۱۱ ب) صدق کند. وقتی $|x|$ بزرگ می‌شود، نمودار سهمی $y=x^2$ (شکل ۲۹)، با شیب تندی بالا می‌رود. بنابراین، برای اینکه $|\Delta y|<\varepsilon$ را حفظ کنیم، باید $|\Delta x|$ را با افزایش $|x|$، کوچکتر و کوچکتر سازیم.

خاصیت پیوستگی یکنواخت در نظریهٔ انتگرال‌گیری دارای اهمیت بسزایی است. قضیهٔ زیر در مورد هر تابعی که روی یك فاصلهٔ بسته وکراندار پیوسته باشد به کار می‌رود.

قضیهٔ ۲۱. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و $a<b$. همچنین فرض کنید f تابعی است که روی فاصلهٔ بسته و کراندار

$$D: a\leqslant x\leqslant b$$

پیوسته است. در این صورت f روی D پیوسته یکنواخت است.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون f روی D پیوستهٔ نقطه‌ای است، به‌ازای هر x_1 متعلق به D، می‌توان یك $\delta=\delta(x_1,\varepsilon)>0$ یافت به‌طوری‌که

(۵.۱۱) اگر $|x_1-x_2|<\delta(x_1,\varepsilon)$ و $x\in D$، آنگاه $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2$

(علت به‌کار بردن $\varepsilon/2$ به جای ε در (۵.۱۱)، در طول اثبات، همراه با دلیل به‌کار بردن $\delta/2$ به‌جای δ درجملهٔ بعد روشن خواهد شد.) اجتماع تمامی همسایگیهای باز

$$x_۱-\frac{۱}{۲}\delta(x_۱,\ \varepsilon)<x<x_۱+\frac{۱}{۲}\delta(x_۱,\ \varepsilon),\ x_۱\in D \qquad (۶.۱۱)$$

D را می‌پوشاند. طبق قضیهٔ هاین-برل، یك تعداد بـاپایان از این همسایگیها وجود دارند که D را می‌پوشانند. فرض کنید در این پوشش باپایان، $a_۱,\ a_۲,\ \cdots,\ a_n$ مراکز این همسایگیها باشند، بالاخره فرض کنید

$$\delta_\circ=\min\left\{\frac{۱}{۲}\delta(a_i,\ \varepsilon):i=۱,\ ۲,\ \cdots,\ n\right\} \qquad (۷.۱۱)$$

مینیمم این تعداد بـاپایان از اعداد مثبت در رابطهٔ (۷.۱۱) وجود داشته و یك عدد مثبت است.

باقیماندهٔ اثبات قضیه عبارت از این است که نشان دهیم

(۸.۱۱ الف) اگر x' و x'' متعلق به D بوده و $|x'-x''|<\delta_\circ$ باشد آنگاه

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \qquad (۸.۱۱\ \text{ب})$$

فرض کنید (۸.۱۱ الف) برقرار است، دراین صورت x' متعلق به‌یکی ازهمسایگیهای این پوشش باپایان است، پس یکی از aها، مثلاً a_i، وجود دارد به‌طوری که

$$|x'-a_i|<\frac{۱}{۲}\delta(a_i,\ \varepsilon) \qquad (۹.۱۱\ \text{الف})$$

همچنین

$$|x''-x'|<\delta_\circ\leqslant\frac{۱}{۲}\delta(a_i,\ \varepsilon) \qquad (۹.۱۱\ \text{ب})$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|x''-a_i|&=|x''-x'+x'-a_i|\\&\leqslant|x''-x'|+|x'-a_i|\\&<\frac{۱}{۲}\delta(a_i,\ \varepsilon)+\frac{۱}{۲}\delta(a_i,\ \varepsilon)\end{aligned}$$

یا

$$|x''-a_i|<\delta(a_i,\ \varepsilon) \qquad (۱۰.۱۱)$$

دلیل انتخاب $\delta/۲$ به جای δ در نامساوی (۶.۱۱) از نامساویهایی کـه منجر به نامساوی (۱۰.۱۱) شد، روشن می‌شود. از (۹.۱۱ الف) و (۱۰.۱۱) مشاهده می‌شودکه x' و x''، هردو داخل $\delta(a_i,\ \varepsilon)$-فاصله از a_i قرار دارند، به‌طوری‌که اگراز رابطهٔ (۵.۱۱) استفاده

کرده و قرار دهیم $x=x'$ (یا $x=x''$) و $x_1=a_i$، نتیجه می‌شود

$$|f(x')-f(a_i)|<\varepsilon/2 \qquad \text{(۱۱.۱۱ الف)}$$

و

$$|f(x'')-f(a_i)|=|f(a_i)-f(x'')|<\varepsilon/2 \qquad \text{(۱۱.۱۱ ب)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|f(x')-f(a_i)+f(a_i)-f(x'')|\\&\leqslant|f(x')-f(a_i)|+|f(a_i)-f(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

تمرینها

۱. فرض‌کنید D فاصلهٔ باز $0<x<1$ و به‌ازای هر $x\in D$، $f(x)=1/x$،
(الف) ثابت‌کنید f در D همه‌جا پیوسته است.
(ب) ثابت‌کنید f در D پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۲. (الف) فرض‌کنید فاصلهٔ باز $1<x<2$ است و به‌ازای هر $x\in D$، $f(x)=1/x$.
ثابت‌کنید f در D پیوستهٔ یکنواخت است.
(ب) D را با مجموعهٔ $x\geqslant 1$ جایگزین و دوباره فرض کنید $f(x)=1/x$. آیا f دراین دامنهٔ جدید، پیوسته یکنواخت است؟

۳. از تساویهای مثلثاتی

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

با فرض

$$A+B=x_1, \qquad A-B=x_2$$

نتیجه می‌گیریم

$$\sin x_1-\sin x_2=2\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

(الف) با استفاده از نتیجهٔ فوق نشان دهیدکه به‌ازای هر x_1 و x_2 داریم

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$$

(ب) از قسمت (الف) استفاده کرده و ثابت کنید تابع

$$f(x) = \sin x, \qquad -\infty < x < \infty$$

پیوستهٔ یکنواخت است.

۴. فرض کنید $a < b$ اعدادی حقیقی و f دردامنهٔ $a < x < b$ پیوستهٔ یکنواخت است. ثابت کنید برد f کراندار است.

برای هر یك از توابع f که در زیر داده شده و در دامنهٔ D تعریف شده‌اند، $\delta > 0$ ای برحسب $\varepsilon > 0$، به‌دست آورید به‌طوری که به‌ازای x' و x'' متعلق به D و $|x' - x''| < \delta$، داشته باشیم

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

۵. $f(x) = x^2$، $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

۶. $f(x) = 2x^2$، $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

۷. $f(x) = 1/x^2$، $1 \leqslant x \leqslant 1000$.

۸. $f(x) = 3\sin x$، $-\infty < x < \infty$. [راهنمایی: به‌تمرین ۳ مراجعه کنید.]

۹. $f(x) = \sin(3x)$، $-\infty < x < \infty$.

۱۰. $f(x) = \sqrt{x}$، $0 \leqslant x < \infty$. [راهنمایی: نشان دهید به‌ازای هر $x \geqslant 0$ و $h \geqslant 0$، داریم $|\sqrt{x+h} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{h}$.]

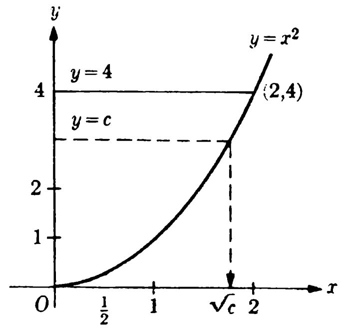
۱۲. مقادیر میانی

وقتی که نمودار $y = x^2$ را رسم می‌کنیم، معمولاً چند نقطه را تعیین کرده و آنها را با منحنیهای غیرشکستهٔ هموار به‌یکدیگر وصل می‌نماییم. هنگامی که مداد از نقطهٔ $(0, 0)$ به‌نقطهٔ $(2, 4)$ حرکت می‌کند، اگر آن را از روی کاغذ برنداریم، آنگاه هرخط افقی بین محور xها وخط $y = 4$ را قطع می‌کند. یعنی اگر c عددی بین ۰ و ۴ باشد، آنگاه دست‌کم یك مقدار x بین ۰ و ۲ وجود دارد به‌طوری که تابع $f(x) = x^2$ مقدار c را در آن نقطه می‌پذیرد (شکل ۳۰). برای این مثال خاص، مقدار مناسب x عبارت است از $x = \sqrt{c}$. لیکن برای توابع پیچیده‌تر، ممکن است نتوانیم فرمول صریحی برای x مربوطه به‌دست آوریم.

مثال ۱. فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$x + 1 = 3\sin x \qquad (1.12)$$

اگر $f(x) = x + 1 - 3\sin x$، آنگاه



شکل ۳۰. اگر $۴ > c > ۰$، یك عدد بین ۰ و ۲ وجود دارد به‌طوری‌که $c = x^{۲}$.

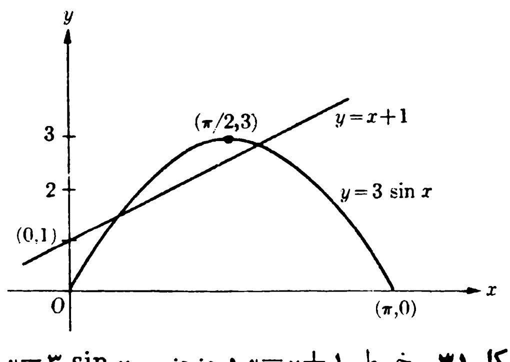
$$f(۰)=۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\left(\frac{\pi}{۲}\right)+۱-۳\approx ۲٫۵۷-۳=-۰٫۴۳$$

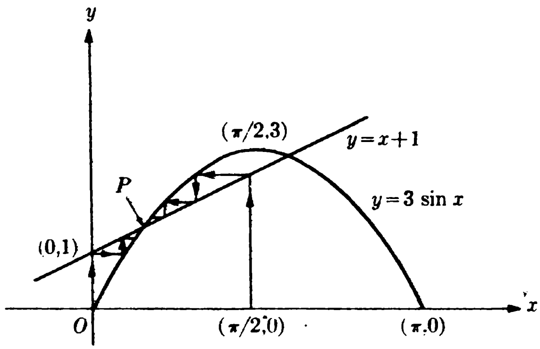
تابع f برای تمامی xها پیوسته است. چون $f(۰)$ مثبت و $f(\pi/۲)$ منفی است، برای یك مقدار x بین ۰ و $\pi/۲$، معادلهٔ $f(x)=۰$ باید دارای یك جواب باشد. یك فرمول ساده‌ای وجود ندارد که x را به‌طورصریح به‌دست دهد، گرچه روشی(به‌عنوان مثال، روش نیوتن) وجود دارد که این مقدار را به طور تقریبی با هر تقریب دلخواه به‌دست می‌دهد. یك روش‌تکراری، یك دنبالهٔ $x_۱, x_۲, \ldots$ به‌دست می‌دهدکه مطابق شرح زیر به‌سوی یك ریشهٔ معادله همگراست. فرض کنید $x_۱=۰$، و برای هرعدد صحیح و مثبت n

$$x_{n+۱}=\sin^{-۱}\left(\frac{۱+x_n}{۳}\right) \qquad (۲.۱۲)$$

اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سوی حدی همگرا باشد



شکل ۳۱. خط $y=x+۱$ و منحنی $y=۳\sin x$ در نقطه‌ای بین $x=۰$ و $x=\pi/۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند، که در آن نقطه $x+۱-۳\sin x=۰$ است.



شکل۳۲. اگر $x_۱=۰$ و به‌ازای $n\geqslant ۱$، $x_{n+۱}=\sin^{-۱}[(۱+x_n)/۳]$ یا $۳\sin(x_{n+۱})=۱+x_n$، آنگاه، $x_{n+۱}$ را با حرکت افقی از نقطهٔ $(x_n ، ۱+x_n)$ روی خط $y=x+۱$، به‌نقطهٔ $(x_{n+۱}، ۳\sin x_{n+۱})$ روی منحنی $y=۳\sin x$، به‌دست می‌آوریم. پلکان مارپیچ به نقطهٔ P که محل تلاقی خط ومنحنی است، همگراست. (همچنین می‌توانیم ازنقطهٔ $x_۱=\pi/۲$ شروع کرده و به‌سمت نقطهٔ P از سمت راست حرکت کنیم.)

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} x_{n+۱}=L$$

آنگاه

$$L=\sin^{-۱}\left(\frac{۱+L}{۳}\right)$$

و

$$۳\sin L=L+۱ \qquad (۳.۱۲)$$

تعبیر هندسی معادلات (۲.۱۱) و (۳.۱۱) درشکل۳۲ نشان داده شده است.

هدف فعلی ما این است که قضیهٔ مقدار میانی را اثبات کنیم نه اینکه تکنیکهای لازم برای حل معادلاتی نظیر معادلهٔ (۱.۱۲) را تعمیم دهیم.

قضیهٔ ۲۲ (مقدار میانی). فرض کنید a و b دو عدد حقیقی هستند به‌طوری که $a<b$. همچنین‌فرض‌کنید f یك تابع حقیقی پیوسته روی $a\leqslant x\leqslant b$است. اگر $f(a)\neq f(b)$ و c یك عدد بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه حداقل‌یك عدد $x_۰$ بین a و b وجود دارد به‌طوری که

$$f(x_۰)=c \qquad (۴.۱۲)$$

اثبات. اثبات را در حالت

$$f(a)<c<f(b) \qquad (۵.۱۲)$$

ارائه می‌دهیم. درحالتی‌که نامساوی (۵.۱۲) برعکس است، اثبات، تفاوت مختصری دارد که جزئیات آن در اینجا ارائه نخواهد شد. با فرض (۵.۱۲)، مجموعهٔ

$$S=\{x : f(x)<c,\ \ a\leqslant x\leqslant b\} \tag{۶.۱۲}$$

یك مجموعهٔ غیرتهی‌است؛ زیرا شامل a است و ازطرف بالا توسط b کراندار است. بنابر اصل تمامیت مجموعهٔ اعداد حقیقی، عدد حقیقی $x_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$x_\circ=\operatorname{lub}(S) \tag{۷.۱۲}$$

دقیقاً سه حالت برای $f(x_\circ)$ وجود دارد

(الف) $\quad f(x_\circ)<c$

(ب) $\quad f(x_\circ)=c$

(پ) $\quad f(x_\circ)>c$

نشان می‌دهیم که نه (الف) و نه (پ) هیچکدام برقرار نیستند ودر نتیجه تساوی (۴.۱۲) اثبات می‌شود.

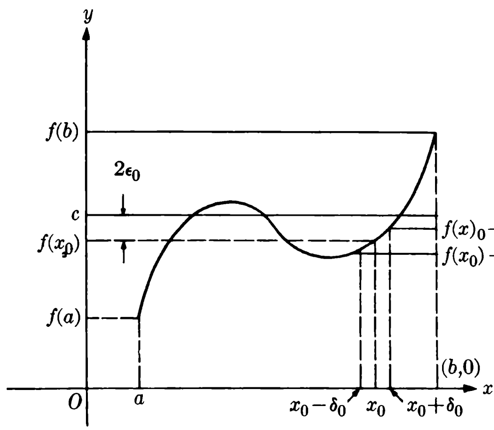
حالت (الف). اگر $f(x_\circ)<c$ باشد، اعداد

$$\frac{۱}{۲}(c-f(x_\circ)) \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}(f(b)-c)$$

مثبت هستند. فرض‌کنید $\varepsilon_\circ$ از هردوی اینها کوچکتر است. چون $a\leqslant x_\circ\leqslant b$ و f درنقطهٔ $x_\circ$ پیوسته است، لذا $\delta_\circ>\circ$ ای وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $|x-x_\circ|<\delta_\circ$ و $a\leqslant x\leqslant b$، آنگاه $\quad |f(x)-f(x_\circ)|<\varepsilon_\circ$

اما، در این صورت (به‌شکل ۳۳ توجه‌کنید) به‌ازای $x_\circ<x<x_\circ+\delta_\circ$، از



شکل۳۳. اگر $f(x_\circ)<c$، آنگاه $x_\circ\neq\operatorname{lub}\{x : f(x)<c,\ a\leqslant x\leqslant b\}$.

$$f(x_\circ)-\varepsilon_\circ < f(x) < f(x_\circ)+\varepsilon_\circ$$

نتیجه می‌شود که

$$f(x) < f(x_\circ)+\frac{۱}{۲}\,(c-f(x_\circ)) = \frac{۱}{۲}\,(c+f(x_\circ)) < \frac{۱}{۲}\,(c+c) = c$$

از اینجا نتیجه می‌شود که S شامل اعداد $x > x_\circ$ است که با تساوی (۷.۱۲) تناقض دارد. بنابراین حالت (الف) برقرار نیست.

حالت (پ). اگر $f(x_\circ) > c$ باشد آنگاه عدد $\varepsilon' = (۱/۲)(f(x_\circ)-c)$ مثبت است. همچنین f در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته است. بنابراین، عدد مثبت δ' وجود دارد به‌طوری که

اگر $|x-x_\circ| < \delta'$ و $a \leqslant x \leqslant b$، آنگاه $|f(x)-f(x_\circ)| < \varepsilon$

(شکل ۳۴). از اینجا نتیجه می‌شود که

(۸.۱۲ الف) اگر $x_\circ-\delta' < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) > c$

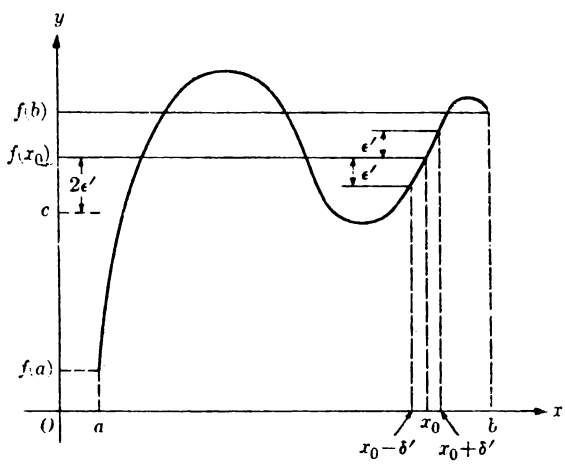
اما، طبق تعریف مجموعهٔ S و تساوی (۷.۱۲) داریم

(۸.۱۲ ب) اگر $x_\circ < x < b$، آنگاه $f(x) \geqslant c$

از ترکیب (۸.۱۲ الف) و (۸.۱۲ ب) و $f(x_\circ) > c$، نتیجه می‌گیریم که

(۸.۱۲ پ) اگر $x_\circ-\delta' < x \leqslant b$، آنگاه $f(x) \geqslant c$

بنابراین هیچیک از اعداد بین $x_\circ-\delta'$ و b متعلق بـه S نیستند، که با این امر کـه $x_\circ$ کوچکترین کران بالای S است، در تناقض می‌باشد. پس حالت (پ) نیز برقرار نیست. نتیجتاً، $f(x_\circ)=c$.



شکل ۳۴. اگر $f(x_\circ) > c$، آنگاه $x_\circ \neq \operatorname{lub}\{x : f(x) < c,\ a \leqslant x \leqslant b\}$.

نتیجهٔ ۲۲ الف. اگر f روی $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته و $f(a) < ۰$ و $f(b) > ۰$ باشد، آنگاه معادلهٔ $f(x) = ۰$ دست‌کم یك ریشه بین a و b دارد.

اثبات. این نتیجه حالت خاصی از قضیهٔ ۲۲ است.

نتیجهٔ ۲۲ ب. فرض‌کنید n یك عدد صحیح مثبت و c یك عدد حقیقی مثبت است. در این صورت معادلهٔ

$$x = \sqrt[n]{c} \quad \text{یا} \quad x^n = c \tag{۹.۱۲}$$

دارای یك ریشهٔ مثبت منحصر به‌فرد است.

اثبات. قضیهٔ ۲۲ را برای تابع پیوستهٔ

$$f(x) = x^n\text{، با شرط } a = ۰ \text{ و } b = ۱ + c$$

به‌کار می‌بریم. در این صورت

$$f(a) = ۰^n = ۰$$

$$f(b) = (۱ + c)^n = ۱ + nc + \frac{n(n-۱)}{۲!}c^۲ + \cdots \geqslant ۱ + nc > c$$

زیرا $n \geqslant ۱$. بنابراین داریم

$$f(a) < c < f(b)$$

لذا، از قضیهٔ ۲۲ بر می‌آید که دست‌کم یك $x_۰$ بین ۰ و $c + ۱$ وجود دارد به طوری که

$$f(x_۰) = x_۰^n = c \quad \text{یا} \quad x_۰ = \sqrt[n]{c}$$

برای اثبات اینکه معادلهٔ (۹.۱۲) به‌ازای هر $x > ۰$ فقط دارای یك جواب است، لازم است توجه‌کنیم که تابع x^n، به‌ازای هر $x > ۰$، افزایشی سره است، لذا به‌ازای دومقدار متفاوت از xهای مثبت دارای یك مقدار نیست.

توضیح ۱. قضیهٔ ۲۲ و این نتیجه، وجود اعدادی حقیقی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ و $\sqrt[۵]{۴}$ و بقیه را ثابت می‌کند.

توضیح ۲. اکنون به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت a و هرعددگویا و مثبت $x = p/q$، a^x را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \;; \qquad a > ۰ \text{ و } p \text{ و } q \text{ اعداد صحیح مبثت،}$$

اگر $x = -p/q$ یك عدد گویای منفی باشد، a^x را چنین تعریف می‌کنیم

$$p \text{ و } q \text{ اعداد صحیح مثبت؛ و } a > ० \qquad ; \qquad a^{-p/q} = \frac{۱}{a^{p/q}}$$

اگر $a > ۱$ و $x = p/q > x' = p'/q'$، آنگاه

$$a^x > a^{x'}$$

بنابراین تابع $x \rightarrow a^x$، وقتی $a > ۱$ است، روی دامنهٔ اعداد گویا یک تابع افزایشی سره است. بالاخره، برای x گنگ و $a > ۱$، a^x را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ $\{a^r : r < x \text{ ، } r \text{ گویا}\}$ تعریف می‌کنیم. اگر $० < a < ۱$ باشد قرار می‌دهیم $b = ۱/a$. دراین صورت $b > ۱$، و a^x را به‌صورت

$$a^x = b^{-x}$$

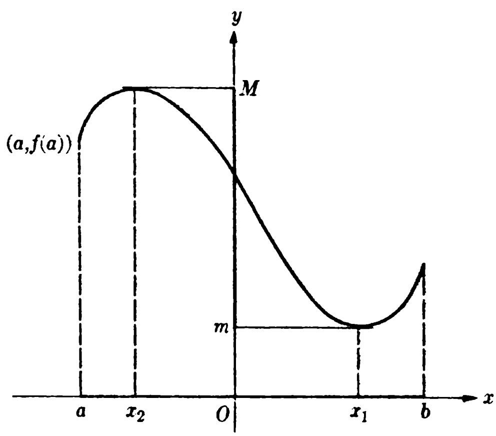
تعریف می‌کنیم.

با ادامهٔ چنین برنامه‌ای، می‌توانیم قاعدهٔ اساسی

$$a^{x_۱} a^{x_۲} = a^{(x_۱ + x_۲)}, \qquad a > ०$$

را اثبات‌کنیم. اما این اثبات شامل مقدار زیادی کار با کوچکترین‌کران بالا است، که در اینجا این‌کار را ادامه نمی‌دهیم.

توضیح ۳. از قضیهٔ مقدار میانی، همراه با قضیهٔ مقادیر ماکزیمم و مینیمم، نتیجه می‌شود که اگر f یک تابع پیوسته روی یک فاصلهٔ بسته وکراندار (دامنهٔ f) باشد، آنگاه برد f نیز



شکل ۳۵. یک تابع پیوسته، یک فاصلهٔ بسته‌وکراندار $a \leqslant x \leqslant b$ را به روی فاصلهٔ بسته و کراندار $m \leqslant y \leqslant M$ می‌نگارد.

یك فاصلهٔ بسته و کراندار است. پس اگر m مینیمم و M ماکزیمم f در فـاصلهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه نقط x_1 و x_2 در $[a, b]$ وجود دارند به طوری که

$$f(x_1)=m, \qquad f(x_2)=M$$

و اگر c هرعدد دلخواه بین m و M باشد، عدد x ای متعلق به فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ وجود دارد به طوری کـه $c=f(x)$. بنابراین بـرد f عبارت است از فاصلهٔ بستهٔ $m \leqslant y \leqslant M$ (شکل ۳۵).

تمرینها

۱. فرض کنید f دارای نموداری مطابق شکل زیر است. خط $y=c$ نمودار تابع را در نقاط A، B، C، D، و E قطع می‌کند. فرض کنید

$$S=\{x : f(x)<c, \qquad a\leqslant x\leqslant b\}$$

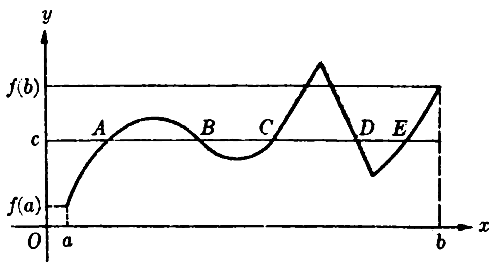
و

$$T=\{x : f(x)>c, \qquad a\leqslant x\leqslant b\}$$

فرض کنید

$$x_1=\mathrm{glb}(S), \qquad x_2=\mathrm{lub}(S)$$
$$x_3=\mathrm{glb}(T), \qquad x_4=\mathrm{lub}(T)$$

تصویر کدامیك از نقاط روی نمودار زیر برابراست با x_1؟، x_2؟، x_3؟، x_4؟



۲. در اثبات قضیهٔ ۲۲، نامساویهای (۵.۱۲) را با $f(a)>c>f(b)$ تعویض کرده و فرض کنید $S=\{x : f(x)>c, a\leqslant x\leqslant b\}$. اگرمی‌خواستیم x_1 راطوری تعریف کنیم که $f(x_1)=c$، آیا می‌بایست قرار دهیم $x_1=\mathrm{lub}(S)$، یا $x_1=\mathrm{glb}(S)$؟ با شکلهای گوناگون این موضوع را نشان دهید.

۳. در اثبات قضیهٔ ۲۲، با در نظر گرفتن $f(a)<c<f(b)$، فرض کنید

$$T=\{x : f(x)>c, \ a\leqslant x\leqslant b\}$$

و $x_2=\mathrm{glb}(T)$. این مطالب را با نمودار نشان دهید. آیا $f(x_2)<c$ است؟ یـا $f(x_2)>c$؟ یا $f(x_2)=c$؟

۴. روش موضع غلط برای به دست آوردن ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ بدین ترتیب است: یك فاصلهٔ $[a, b]$ را، مشروط بر اینکه $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند، انتخاب می‌کنیم. این فاصله را بدو نیمه تقسیم می‌نماییم. اگر $f((a+b)/2)=0$، کار تمام است؛ زیرا $x=(a+b)/2$ یکی از ریشه‌ها خواهد بود. در غیر این صورت $f((a+b)/2)$ با $f(a)$ یا $f(b)$ مختلف‌العلامه است. بنابراین اگر f روی فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، یا یك ریشه را دقیقاً به‌دست آورده‌ایم، یا اینکه باید یك ریشه درفاصلهٔ $[a_1, b_1]$ به‌طول $(b-a)(1/2)$ وجود داشته‌باشد. این‌عمل‌را تکرارمی‌کنیم. بعد از n مرتبه تکرار، یا یك ریشه را دقیقاً به‌دست می‌آوریم، یا به‌این نتیجه می‌رسیم که یك ریشه در فاصلهٔ $[a_n, b_n]$ به‌طول $(b-a)(1/2)^n$ وجود دارد. فرض‌کنید این عمل به‌طور بی‌پایانی ادامه یابد

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant b$$

و

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant a$$

نشان دهید که

(الف) $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد. (ب) $\lim_{n\to\infty} b_n$ وجود دارد.

(پ) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. (ت) اگر $x=\lim_{n\to\infty} a_n$، آنگاه $f(x)=0$.

۱۳. ترکیب توابع

بعضی اوقات یك تابع معرف نگاشتی است که می‌توان عمل آن را با دو نگاشت ساده‌تر و به طور متوالی انجام داد. عمل ترکیب توابع را با مثالهایی روشن می‌کنیم و سپس یك تعریف عمومی ارائه می‌دهیم.

مثال ۱. توابع

$$f_1(x)=\sin(x^2), \qquad -\infty < x < \infty \qquad \text{(۱.۱۳ الف)}$$

$$f_2(x)=\sin^2 x, \qquad -\infty < x < \infty \qquad \text{(۱.۱۳ ب)}$$

مثالهایی ازترکیب توابع هستند. در معادلهٔ (۱.۱۳ الف)، نخست x را مربع کرده وسپس سینوس آن را به‌دست می‌آوریم. بنابراین اگر

$$g(x)=x^2 \qquad \text{(۲.۱۳ الف)}$$

و

$$h(x)=\sin x \qquad \text{(۲.۱۳ ب)}$$

باشد، معادلهٔ (۱.۱۳ الف) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f_1(x)=h(g(x)) \qquad \text{(۳.۱۳ الف)}$$

یا

$$f_1=h\circ g \qquad \text{(۳.۱۳ ب)}$$

معادلهٔ (۳.۱۳ الف) خوانده می‌شود: "اف یك ایکس، برابر است با اچ جی ایکس" و (۳.۱۳ب) خوانده می‌شود: "اف یك، برابر ترکیب اچ با جی است." نماد $h\circ g$ برای این به‌کار می‌رود که بتوان ترکیب h با g را از حاصل ضرب معمولی hوg متمایزساخت.

در معادلهٔ دوم، (۱.۱۳ ب)، نخست $\sin x$ را محاسبه‌کرده و سپس نتیجه را به‌توان ۲ می‌رسانیم. بـا استفاده از معادلات (۲.۱۳ الف) و (۲.۱۳ ب) می‌توانیم (۱.۱۳ ب) را به‌صورت

$$f_2(x)=g(h(x)) \qquad \text{(۴.۱۳ الف)}$$

دوباره بنویسیم، یا به‌عبارت دیگر

$$f_2=g\circ h \qquad \text{(۴.۱۳ ب)}$$

در هر دو مثال (۱.۱۳ الف) و (۱.۱۳ ب)، دامنه‌های توابع یکسان بوده و برابر تمام اعداد حقیقی است.

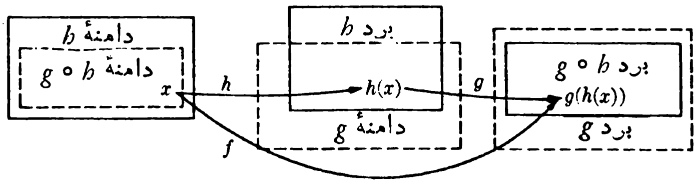
در حالت کلیتر، فرض کنید ترکیب g با h را مطابق قانون فوق تعریف کنیم. در این صورت

$$h=g\circ h \qquad \text{(۵.۱۳ الف)}$$

به‌این معناست که

$$f(x)=g(h(x)) \qquad \text{(۵.۱۳ ب)}$$

برای تمام xهایی‌که به‌ازای آنها سمت راست معادلهٔ (۵.۱۳ ب) تعریف شده باشد. اینجا برخلاف (۲.۱۳ الف) و (۲.۱۳ ب) که h و g محدود به‌توابع خاصی‌اند، h و g معرف دو تابع دلخواه هستند. برای محاسبهٔ (۵.۱۳ ب)، نخست بـا مقدار x در دامنهٔ h شروع می‌کنیم (شکل ۳۶). دراین صورت $h(x)$ یك عدد در برد h است. اگر این عدد، $h(x)$، در دامنهٔ g نیز باشد، آنگاه $g(h(x))$ یك عدد در برد g خواهد بود. بنابراین، دامنه $g\circ h$، یك زیرمجموعه از دامنه h، و برد $g\circ h$ زیرمجموعه‌ای از برد g است.



شکل ۳۶. ترکیب g با h؛ $f(x)=g(h(x))$، $f=g\circ h$.

مثال ۲. فرض کنید

$$g(x) = \sqrt{۱ - x}, \qquad x \leqslant ۱ \tag{۶.۱۳ الف}$$

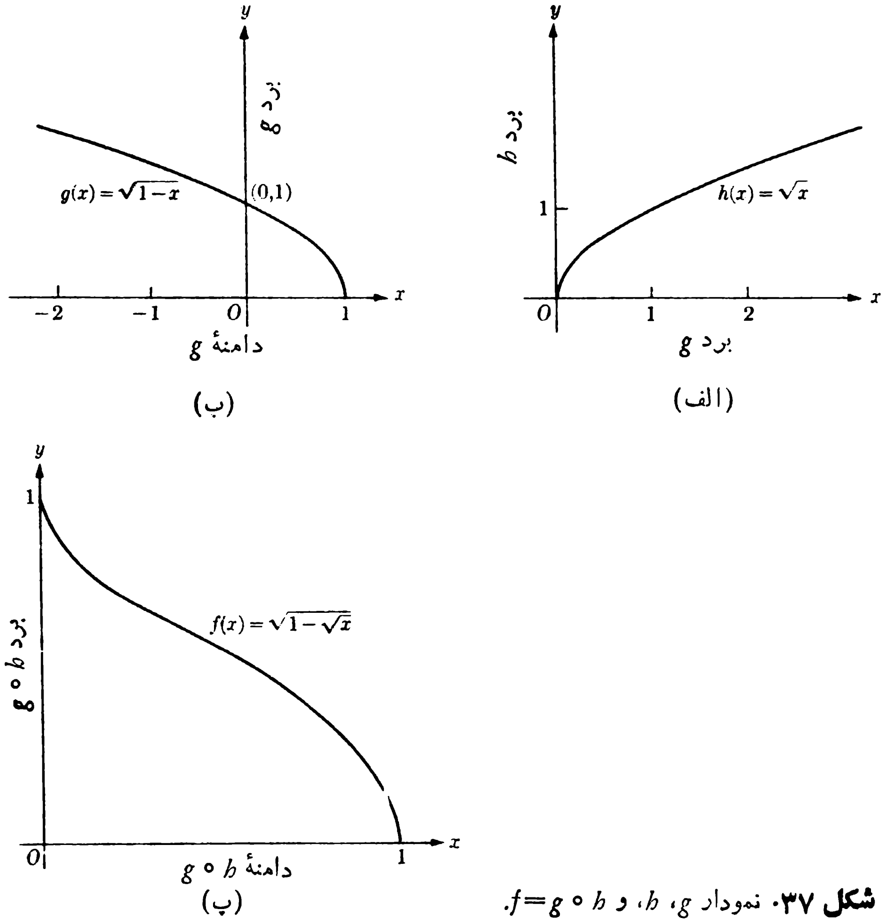
و

$$h(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geqslant ۰ \tag{۶.۱۳ ب}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= \sqrt{۱ - h(x)}, \qquad x \geqslant ۰,\ h(x) \leqslant ۱ \\ &= \sqrt{۱ - \sqrt{x}}, \qquad x \geqslant ۰,\ \sqrt{x} \leqslant ۱ \end{aligned}$$

از محدودیتهای $x \geqslant ۰$ و $\sqrt{x} \leqslant ۱$، دامنهٔ $f = g \circ h$ به‌دست می‌آید که عبارت است از $۰ \leqslant x \leqslant ۱$. شکل ۳۷ (الف)، (ب)، و (پ) نمودارهای توابع h، g، و $g \circ h$ است.



شکل ۳۷. نمودار g، h، و $f = g \circ h$.

تعریف ۱۱. ترکیب توابع. فرض کنید g یك تابع حقیقی با دامنهٔ D_g و برد R_g، و h یك تابع حقیقی بادامنهٔ D_h و برد R_h است. ترکیب g با h، تابعی مانند f است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x)=g(h(x))$$

دامنهٔ f، D_f، عبارت است از تمـام مقادیر x متعلق بـه D_h به طوری که $h(x)\in D_g$.

توضیح ۱. از دید دیگری نیز می‌توان به‌نگاشت مرکب $f=g\circ h$ نگریست. با یك عدد y در مقطع D_g و R_h، شروع می‌کنیم. چون y در برد h قرار دارد، یك عدد x متعلق به D_h وجود دارد به طوری که $h(x)=y$، و چون y در دامنهٔ g واقع است، لذا یك عدد $z=g(y)$ وجود دارد. از ترکیب اینها نتیجه می‌شود $z=g(h(x))=f(x)$. بنابراین

(x, y) یك عضو تابع h است،

(y, z) یك عضو تابع g است،

و

(x, z) یك عضو تابع مرکب $f=g\circ h$ است.

بنابراین جفت مرتب (x, z) متعلق بـه تابع مرکب $f=g\circ h$ است اگر (و تنها اگر) عددی مانند y وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(x, y) متعلق به h، و (y, z) متعلق به g باشد

توضیح ۲. بـا استفاده از دستگاه مختصات سه بعدی (x, y, z)، می‌توانیم یك نمـایش نموداری از ترکیب توابع ارائه دهیم

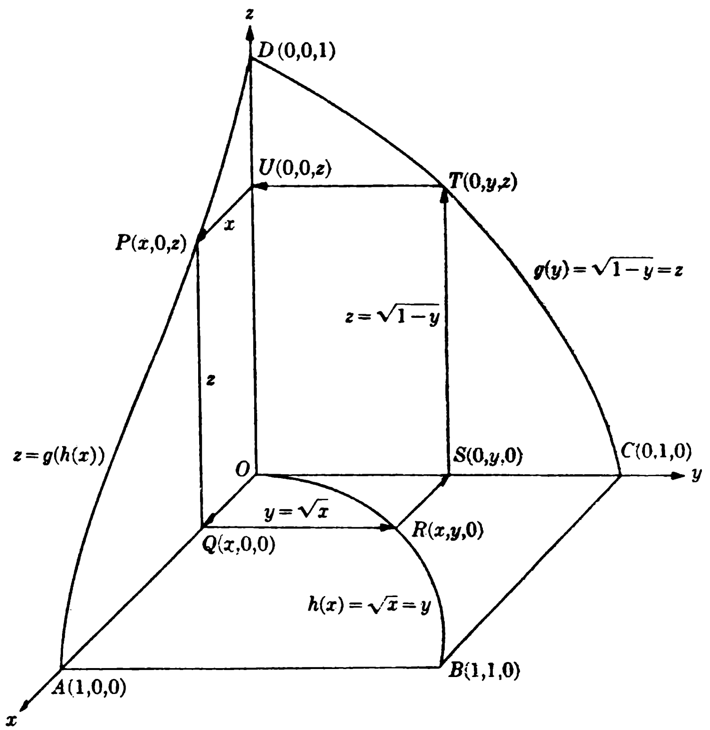
$$y=h(x),\qquad z=g(y)$$
$$f(x)=g(h(x))$$

شکل ۳۸ چنین تعبیری را برای توابع

$$h(x)=\sqrt{x},\qquad g(y)=\sqrt{1-y}$$
$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

به‌دست می‌دهد. برای به‌دست آوردن مقدار $f(x)$ به‌ازای یك مقدارمشخص x، $0\leqslant x\leqslant 1$، فرض کنید Q نقطه‌ای بـه طول x روی محور xها باشد و دیاگرام $Q\to R$، $R\to S$، $S\to T$، $T\to U$، و $U\to P$ را دنبال کنیم. دراینجا $R(x, y, 0)$ نقطه‌ای روی‌نمودار $y=h(x)$ و مختص y در R و $S(0, y, 0)$ یکسان است، و $T(0, y, z)$ نقطه‌ای روی نمودار $z=g(y)$ است. چون مختص z نقاط $U(0, 0, z)$ و $P(x, 0, z)$ با مختص z نقطهٔ T برابراست، مختصات x و z نقطهٔ P در معادلات زیرصدق می‌کند

$$z=g(y)=g(h(x))$$



شکل ۳۸. نمایش ترکیب توابع درفضای xyz : $y=h(x)$، $z=g(y)=g(h(x))$.

بنابراین P روی نمودار

$$z=f(x)$$

در صفحهٔ xz (یعنی $y=0$) قرار دارد. برای مثال در شکل ۳۸ منحنی $A \dots P \dots D$ نمودار تابع

$$z=\sqrt{1-\sqrt{x}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

نشان داده شده است.

تمرینها

ترکیبهای $f_1=g \circ h$ و $f_2=h \circ g$ را برای توابع h و g، که در زیر داده شده‌اند، به‌دست آورید. در هرمورد دامنهٔ f_1 و f_2 را مشخص کنید.

۱. $g(x)=2x+1$، برای هرعدد حقیقی x؛
$h(x)=\sqrt{x}$، $x \geqslant 0$.

۲. $g(x)=\frac{x}{x+1}$، $x\neq -1$؛

$h(x)=\frac{1}{x}$، $x\neq 0$

۳. $g(x)=\sqrt{x-1}$، $x\geqslant 1$؛

$h(x)=\frac{1}{x}$، $x\neq 0$

۱۴. پیوستگی توابع مرکب

در این قسمت، درنظر داریم که این سؤال را بررسی کنیم: آیا ترکیب یك تابع پیوسته با یك تابع پیوستهٔ دیگر، تابعی پیوسته است؟ سؤال باید دقیقتر مطرح شود، زیرا یك تابع ممکن است درنقاطی از دامنهٔ خود پیوسته و درنقاطی دیگر ناپیوسته باشد. وقتی که مسأله را دقیقاً بیان کنیم، بهدست آوردن جواب که مثبت نیز هست، بهسادگی میسر است.

قضیهٔ ۲۳. فرض کنید تابع h در نقطهٔ c و تابع g در نقطهٔ $b=h(c)$ پیوسته است. اگر $g\circ h=f$، یعنی $f(x)=g(h(x))$ باشد، آنگاه f در نقطهٔ c پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon>0$. باید نشان دهیم که یك عددمثبت δ وجود دارد بهطوری که

اگر $x\in D_f$ و $|x-c|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$

چون تابع g درنقطهٔ b پیوسته و $\varepsilon>0$، یك عدد $\delta_1>0$ وجود دارد بهطوری که

اگر $y\in D_g$ و $|y-b|<\delta_1$، آنگاه $|g(y)-g(b)|<\varepsilon$

اکنون، برای پیوستگی تابع h در نقطهٔ c، فرض کنید δ_1 نقشی را که معمولاً اپسیلن ایفا می‌کند، داشته باشد. چون h در نقطهٔ c پیوسته و $\delta_1>0$، یك عدد مثبت δ_2 وجود دارد بهطوری که

اگر $x\in D_h$ و $|x-c|<\delta_2$، آنگاه $|h(x)-h(c)|<\delta_1$

بنابراین، اگر $x\in D_f$ و $|x-c|<\delta_2$ و $y=h(x)$، آنگاه $x\in D_h$ و

$$\begin{aligned}|f(x)-f(c)|&=|g(h(x))-g(h(c))|\\&=|g(y)-g(b)|\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

زیرا $y\in D_g$ و $|y-b|=|h(x)-h(c)|<\delta_1$. بنابراین برای $\varepsilon>0$ داده شده، با دنبال‌کردن مراحل یاد شده درفوق و با فرض $\delta=\delta_2$، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

شکل ۳۹ نمودار توابع $y=h(x)$ و $z=g(y)$ را به ترتیب در صفحات xy و yz نشان می‌دهد. نقطهٔ c روی محور xها، و $\varepsilon>0$ داده شده‌اند، نقاط $f(c)$ و $f(c)-\varepsilon$ و $f(c)+\varepsilon$ را روی محور zها مشخص می‌کنیم. سپس از نمودار g و این مطلب که تابع g در نقطهٔ $b=h(c)$ پیوسته است استفاده کرده و یك فاصلهٔ

$$b-\delta_1<y<b+\delta_1$$

روی محور yها به‌دست می‌آوریم به طوری که وقتی y در این فاصله قرار دارد، $g(y)$ بین $f(c)-\varepsilon$ و $f(c)+\varepsilon$ واقع باشد. سپس به‌نمودار تابع h برگشته واز پیوستگی h در نقطهٔ c استفاده کرده و فاصلهٔ

$$c-\delta_2<x<c+\delta_2$$

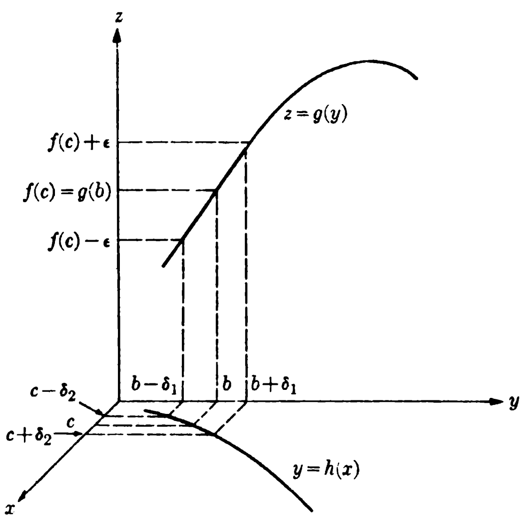
را روی محور xها به دست می‌آوریم به طوری که وقتی x در این فاصله قرار دارد، $y=h(x)$ بین $b-\delta_1$ و $b+\delta_2$ واقع باشد.

مثال ۱. فرض کنید $h(x)=x^2$ و $g(y)=3y-2$، و c یك عدد حقیقی و $\varepsilon>0$. در این صورت

$$b=h(c)=c^2$$

و

$$f(c)=g(h(c))=3h(c)-2=3c^2-2$$



شکل ۳۹. پیوستگی تابع مرکب.

مراحل اثبات قضیهٔ ۲۲ را دنبال می‌کنیم.

۱. برای به‌دست آوردن $\delta_۱ > ۰$ به‌طوری‌که برای $|y-b| < \delta_۱$، داشته باشیم

$$|g(y)-g(b)| = |(۳y-۲)-(۳b-۲)|$$
$$= ۳|y-b| < \varepsilon$$

کافی است قرار دهیم $\delta_۱ = \varepsilon/۳$.

۲. برای به‌دست آوردن $\delta_۲ > ۰$ به‌طوری‌که برای $|x-c| < \delta_۲$، داشته باشیم

$$|h(x)-h(c)| = |x^۲ - c^۲|$$
$$= |x-c|\ |x+c| < \delta_۱ = \varepsilon/۳$$

قرار می‌دهیم

$$\delta_۲ = \min\left\{۱،\ \frac{\varepsilon}{۶|c|+۳}\right\}$$

[$۶|c|+۳$ به این طریق محاسبه می‌شود: نخست x را در فاصله‌ای به طول واحد از نقطه c محدود می‌کنیم. آنگاه

$$|x+c| \leqslant |x|+|c| \leqslant |c|+۱+|c| = ۲|c|+۱$$

و از این‌رو

$$|x^۲-c^۲| = |x-c|\ |x+c| \leqslant |x-c|(۲|c|+۱)$$

اگر $|x-c| < \varepsilon/۳(۲|c|+۱)$ باشد، آنگاه سمت راست‌ترین عدد رابطهٔ فوق از $\varepsilon/۳$ کوچکتر است.]

۳. فرض کنید $\delta = \delta_۲$. (اکنون اگر مایل باشید می‌توانید از y و $\delta_۱$ صرفنظر کنید.) با انتخاب

$$\delta = \min\left\{۱،\ \frac{\varepsilon}{۶|c|+۳}\right\}$$

یك عدد مثبت δ داریم به‌طوری‌که اگر $|x-c| < \delta$، آنگاه

$$|f(x)-f(c)| = |(۳x^۲-۲)-(۳c^۲-۲)|$$
$$= ۳|x^۲-c^۲|$$
$$= ۳|x-c|\ |x+c| < \varepsilon$$

تمرینها

درهر یك ازتمرینهای زیر،نمودار توابع $y=h(x)$، $z=g(y)$، و $z=f(x)$ به‌طوری که $f(x)=g(h(x))$، را مطابق آنچه در متن گفته شد، رسم کنید. آنگاه برای هر عدد حقیقی داده شدهٔ c و $\varepsilon>0$، یك $\delta>0$ به‌دست آورید به‌طوری‌که وقتی $|x-c|<\delta$، داشته باشیم $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$.

۱. $h(x)=2x-3$، $g(y)=5-4y$، c دلخواه.

۲. $h(x)=\sin x$، $g(y)=3y$، c دلخواه.

۳. $h(x)=\dfrac{1}{x}$، $g(y)=\dfrac{1}{y}$، $x\neq 0$، $y\neq 0$، و $c>0$.

۴. $h(x)=\sin x$، $g(y)=y^2$، c دلخواه.

۵. $h(x)=x^2$، $g(y)=\sin y$، c دلخواه.

۱۵. توابع وارون

تحت شرایطی، اثر یك نگاشت می‌تواند به‌وسیلهٔ نگاشت دیگری خنثی شود. یعنی اگر نگاشت اول g و نگاشت دوم f باشد آنگاه نگاشت مرکب $f\circ g$، روی هرعددی عمل کند، همان عدد را به‌دست می‌دهد.

مثال ۱. توابع

$$f(x)=x^3,\qquad g(x)=x^{1/3} \tag{۱.۱۵}$$

را که دامنه و برد آنها مجموعهٔ اعداد حقیقی است، در نظر می‌گیریم. توابع مرکب $h_1=f\circ g$ و $h_2=g\circ f$ در شرایط

$$h_1(x)=f(g(x))=(g(x))^3=(x^{1/3})^3=x \tag{۲.۱۵ الف}$$

و

$$h_2(x)=g(f(x))=(f(x))^{1/3}=(x^3)^{1/3}=x \tag{۲.۱۵ ب}$$

صدق می‌کنند. چون برای هرعدد حقیقی x، $h_1(x)=x$ و $h_2(x)=x$ است، لذا می‌توانیم بنویسیم $h_1=h_2=I$، به‌طوری‌که I تابع همانی است، یعنی

$$I(x)=x \tag{۳.۱۵}$$

به‌عبارت دیگر

$$f\circ g=I \qquad \text{و} \qquad g\circ f=I \tag{۴.۱۵}$$

از نقطه‌نظر نگاشتها، معادلات (۲.۱۵ الف)، (۲.۱۵ ب)، و (۴.۱۵) مشخص می‌کنند که هرگاه نگاشت g (یا f) روی مقدار به‌خصوصی از x عمل کند، نگاشت دیگر f (یا g) اثر آن را خنثی می‌سازد. این مطلب در مورد توابع (۱.۱۵) به‌وضوح دیده می‌شود، زیرا به توان ۳ رساندن ریشهٔ سوم، یا ریشهٔ سوم گرفتن از توان ۳ هر عدد به همان عدد اولیه می‌انجامد.

هرگاه دو تابع f و g درمعادلهٔ (۴.۱۵) صدق کنند، گوییم g وارون f و f وارون g است.

مثال ۲. بدیهی است که، اگر معکوس معکوس هرعدد حقیقی $x \neq 0$ را به دست آوریم، به‌همان عددحقیقی اولیه خواهیم رسید. این‌مطلب دلالت براین دارد (و به‌سادگی نیز می‌تواند اثبات شود) که اگر f تابع

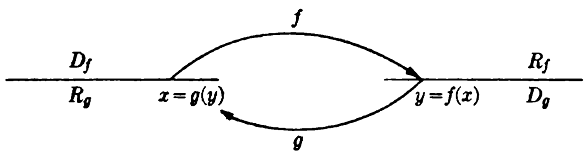
$$f(x)=1/x, \qquad x \neq 0 \tag{۵.۱۵}$$

باشد، آنگاه

$$f \circ f = I_{(x \neq 0)} \tag{۶.۱۵}$$

قید $x \neq 0$ که به‌صورت زیرنویس نشان داده شده برای‌این‌است‌که نشان دهد با وجودی که تابع همانی I روی تمامی اعداد حقیقی تعریف شده ولی صفراز دامنه‌های هر دو تابع f و $f \circ f$ خارج است. یعنی در حالی‌که تابع همانی I، مجموعهٔ تمامی زوجهای مرتب (x, x) و نمودار آن خط $y=x$ است،تابع (۶.۱۵) شامل نقطهٔ $(0, 0)$ نبوده و نمودار آن خط $y=x$ است‌که مبدأ را در برندارد.

تعریف ۱۲. وارون چپ. فرض کنید f تابعی بـا دامنهٔ D_f و برد R_f، و g تابعی بادامنهٔ $D_g=R_f$، وبرد $R_g=D_f$ باشد. اگر، به‌ازای هر $x \in D_f$، داشته باشیم $g(f(x))=x$، آنگاه ترکیب $g \circ f$ روی D_f برابر تابع همانی است و g وارون چپ f نامیده می‌شود.



شکل ۴۰. اگر به‌ازای هر x متعلق به D_f، $g(f(x))=x$، g وارون چپ f است؛ یعنی $g \circ f$ روی D_f برابر I است.

توضیح ۱. همچنین می‌توانیم ایـن شرایط را روی توابع وارون و به زبان مجموعه‌ها و نمودارها تعبیر کنیم. تابع g مجموعهٔ تمامی زوجهای مرتب $(y, g(y))$ است به طوری کـه $y \in D_g=R_f$. امـا برای هر $y \in R_f$، یك $x \in D_f$ وجود دارد به طوری کـه

$f(x)=y$ و $x=g(f(x))=g(y)$. به علاوه این x منحصر به فرد است زیرا g یك تابع است. بنابراین، $g(y)$ به‌ازای هر y دارای یك مقدار است. پس اگر $f(x_1)=f(x_2)=y$، آنگاه

$$g(y)=g(f(x_1))=x_1$$

و

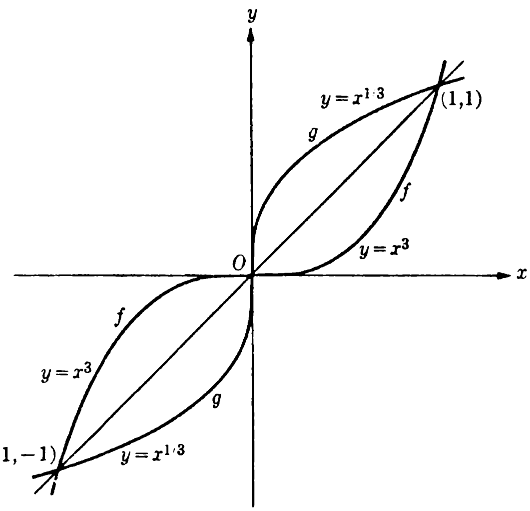
$$g(y)=g(f(x_2))=x_2$$

بنابراین $x_1=x_2$. پس f یك نگاشت یك به‌یك از D_f به R_f به‌دست می‌دهد. هنگامی که x تمام دامنهٔ D_f را بپیماید، نگار آن، $f(x)$، درست یك بار برد R_f را می‌پیماید؛ و برعکس. پس می‌توانیم بنویسیم

$$g=\{(y,\ g(y)):\ y\in D_g\}=\{(f(x),\ x):\ x\in D_f\} \qquad (۷.۱۵)$$

معادله(۷.۱۵) به‌طور ساده بیانگر این مطلب است که برای به‌دست آوردن تمامی زوجهای مرتبی که تابع g را می‌سازند، ترتیب زوجهای مرتب $(x,\ f(x))$ متعلق به f را عوض می‌کنیم، و بدین‌ترتیب زوجهایی به‌صورت $(f(x),\ x)$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار g را به سادگی می‌توان با انعکاس محوری نمودار f نسبت به $y=x$ به دست آورد. شکل ۴۱ این قاعده را برای توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^{1/3}$ نشان می‌دهد.

چون نمودار تابع $y=1/x$، وقتی که آن را نسبت به $y=x$ منعکس نماییم، درست برخودش منطبق می‌شود، لذا تابع $f(x)=1/x$ وارون خودش است. این مطلب را قبلاً نیز نشان دادیم.



شکل ۴۱. نمودارهای $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^{1/3}$ نسبت به‌خط $y=x$ قرینه‌اند.

توضیح ۲. وقتی g یك وارون چپ f است، مانند شکل ۴۰، می‌گوییم f یك وارون راست g است. این صرفاً راه دیگری برای بیان این مطلب است که، $g \circ f$ برابراست با تابع همانی I روی دامنهٔ تابع f یـا روی برد تابع g، یعنی $x=g(y)$، اگـر و تنها اگـر $y=f(x)$. بنابراین برای هر $y \in D_g$ یك x منحصر به فرد متعلق به D_f وجـود دارد به‌طوری که

$$y=f(x)$$

$$g(y)=g(f(x))=x$$

و

$$f(x)=f(g(y))=y$$

به‌عبارت دیگر

$$g \circ f=I \qquad \text{روی دامنهٔ } f،$$

و

$$f \circ g=I \qquad \text{روی دامنهٔ } g،$$

پس g یك وارون چپ و یك وارون راست f است. ضمناً f نیز یك وارون g می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنید

$$f(x)=\log_{10} x, \qquad x>0$$

و

$$g(y)=10^y, \qquad \text{به‌ازای هرعدد حقیقی } y$$

به‌ازای هر $x>0$، یك $y=\log_{10} x$ منحصر به‌فردی وجود دارد به‌طوری که

$$10^y=10^{\log_{10} x}=x$$

یعنی

$$g(f(x))=x \qquad \text{به‌ازای تمامی } x\text{های بزرگتراز صفر} \qquad (8.15)$$

هم‌چنین

$$f(g(y))=f(10^y)=\log_{10}(10^y)=y \qquad \text{به‌ازای هر } y \text{ دلخواه} \qquad (9.15)$$

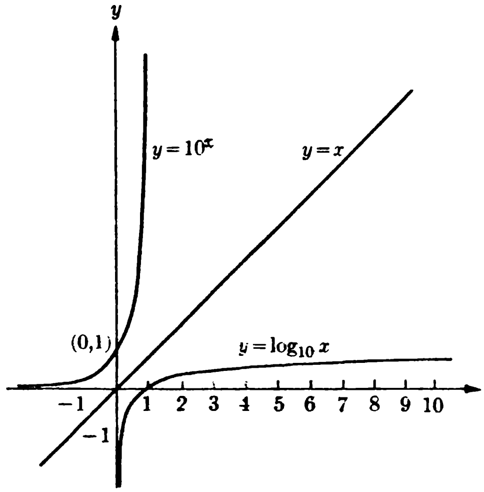
بنابراین

$$g \circ f=I \qquad \text{روی دامنهٔ } x>0$$

$$f \circ g=I \qquad \text{روی دامنهٔ تمامی اعداد حقیقی } y$$

به‌طورکلی، اگر $a>0$ و $a \neq 1$، آنگاه تابع نمایی با پایهٔ a

$$f(x)=a^x \qquad \text{به‌ازای هرعدد حقیقی دلخواه } x$$



شکل ۴۲. نمودار توابع $f(x)=\log_{10} x$ و $g(x)=10^x$. f و g وارون یکدیگرند.

و تابع لگاریتمی در همان پایهٔ a

$$g(x)=\log_a x, \qquad x>0$$

وارون یکدیگرند. شکل۴۲، بهازای $a=10$، نمایش دهندهٔ نمودارهای این توابع برای $a>1$ است. (اگر $0<a<1$، آنگاه نمودار $y=a^x$ دارای شیب منفی خواهدبود.)

توضیح ۳. دیدیم که اگر تابع

$$f=\{(x,\ y) : y=f(x),\ \ x\in D_f\} \qquad (10.15)$$

دارای وارون باشد، آنگاه این وارون، g، عبارت است از

$$g=\{(y,\ x) : y=f(x),\ \ x\in D_f\} \qquad (11.15)$$

معادلهٔ (۱۱.۱۵) بیانگر این مطلب است که

$$\text{اگر } x\in D_f \text{ و } f(x)=y\text{، آنگاه } \qquad g(y)=x \qquad (12.15)$$

معادلهٔ (۱۲.۱۵) یك شیوهٔ جبری برای یافتن وارون یك تابع را نشان می‌دهد.

برای یافتن x برحسب y، معادلهٔ $y=f(x)$ را نسبت به x حل می‌کنیم. نتیجه $x=g(y)$ خواهد بود.

اگر بخواهیم تابع وارون را به‌شکل استاندارد $y=g(x)$ نمایش دهیم کافی است نقش

حروف x و y را در نتیجهٔ به‌دست آمده تعویض کنیم.

مثال ۴. فرض کنید f تابع خطی زیر است

$$f(x)=۳x+۲,\qquad -\infty<x<\infty \qquad (\text{۱۳.۱۵ الف})$$

اگر $y=۳x+۲$ را نسبت به x حل کنیم، نتیجه می‌شود

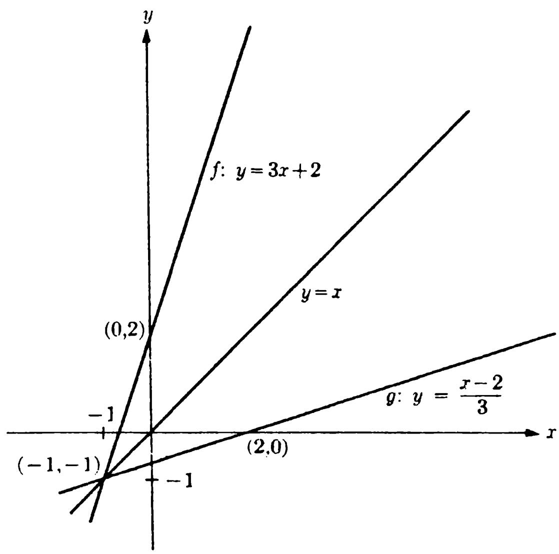
$$x=\frac{y-۲}{۳}=g(y) \qquad (\text{۱۳.۱۵ ب})$$

اکنون اگر نقش حروف x و y را عوض کنیم خواهیم داشت

$$y=g(x)=\frac{x-۲}{۳},\qquad -\infty<x<\infty \qquad (\text{۱۳.۱۵ پ})$$

(توجه کنید که معادلهٔ (۱۳.۱۵ الف) می‌گوید: "برای یافتن $f(x)$، هرمقدار x را گرفته، آن را در ۳ ضرب و بـا ۲ جمع می‌کنیم" و عمل وارون (۱۳.۱۵ ب) یا (۱۳.۱۵ پ) می‌گوید که: "هرمقدار x را گرفته، ۲ واحد از آن کم و نتیجه را بر ۳ تقسیم می‌کنیم." بدیهی است که هر یك از این دو تابع وارون دیگری است.)

شکل ۴۳ نمودارهای توابع وارون، معادلات (۱۳.۱۵ الف) و (۱۳.۱۵ پ) را نشان می‌دهد.



شکل ۴۳. نمودارهای توابع $f(x)=۳x+۲$ و $g(x)=(x-۲)/۳$ که وارون یکدیگرند و نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند.

توضیح ۴. عدم وجود یك تابع وارون. اگر f یك تابع باشد

$$f=\{(x,\ y):y=f(x),\ \ x\in D_f\} \qquad (۱۴۰۱۵)$$

رابطهٔ وارون

$$f^{-۱}=\{(y,\ x):y=f(x),\ \ x\in D_f\}$$

ممکن است یك تابع نباشد، زیرا ممکن است بیش از یك مقدار x در D_f وجود داشته باشد که به یك مقدار $y=f(x)$ وابسته شود، اما هیچ دو زوج مرتب $(y,\ x_۱)$ و $(y,\ x_۲)$، به‌طوری که $x_۱\neq x_۲$، نمی‌تواند متعلق به‌تابع $f^{-۱}$ باشد.

مثال ۵. فرض کنید

$$f(x)=x^۲, \qquad -\infty<x<\infty$$

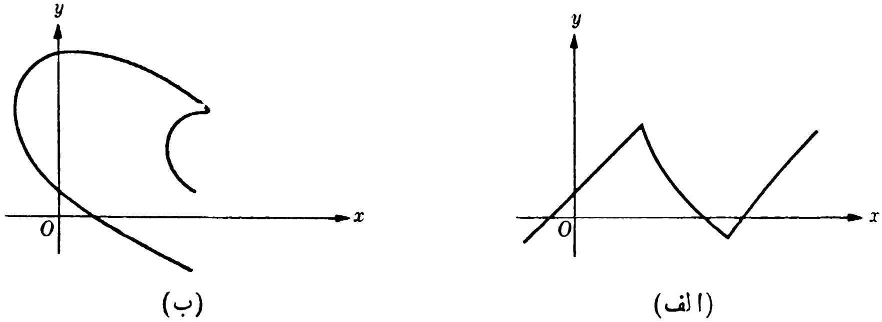
در این صورت، زوجهای مرتب (۴ ,۲ —) و (۴ ,۲) هر دو متعلق به fاند. بنابراین زوجهای وارون شدهٔ (۲ — ,۴) و (۲ ,۴) هر دو متعلق به رابطهٔ وارون $f^{-۱}$ هستند. بنابراین، $f^{-۱}$ تابعی مانند g نیست؛ زیرا اگر باشد، باید داشته باشیم

$$g(۴)=-۲ \qquad و \qquad g(۴)=۲$$

و این تخطی از مفهوم تك مقداری بودن تابع است.

به‌کمك نمودار تابع راه ساده‌ای برای آزمودن اینکه آیا یك منحنی داده شده در صفحهٔ xy یك تابع است یا خیر، وجود دارد. اگر هر خطی که عمود برمحور xها رسم می‌شود منحنی را حداکثردر یك نقطه قطع کند، آنگاه این منحنی نمودار یك تابع است. ولی اگر بتوان خطی عمود برمحور xها رسم کرد که منحنی را در بیش از یك نقطه قطع کند (شکل ۴۴ ب) آنگاه رابطهٔ مشخص شده توسط نمودار، یك تابع نیست.

اکنون اگرنقش x و y را در آزمون نموداری پیشین تعویض کنیم، طریقی به‌دست می‌آید که به وسیلهٔ آن می‌توان، از روی نمودار تابع f، مشخص کرد که آیا $f^{-۱}$ نیز یك تابع است یا خیر. اگر هرخطی که عمود برمحور yها رسم می‌شود، نمودار تابع را



شکل ۴۴. (الف) نمودار یك تابع است. (ب) نمودار یك تابع نیست.

در بیش از یك نقطه قطع کند آنگاه f^{-1} یك تابع نیست. ایــن طریق دیگری است از بیان این مطلب: برای آنکه f^{-1} یك تابع باشد لازم وکافی است‌که نگاشت f از دامنهٔ f به روی برد f یك به یك باشد. برای مثال، (شکل ۴۵) خط $y=c$ $(0<c\leqslant 4)$ نمودار تابع $f(x)=x^2$ را در دونقطهٔ $(-\sqrt{c}, c)$ و $(\sqrt{c}, c)$ قطع می‌کند. برای تابع

$$f(x)=x^2, \qquad -2\leqslant x\leqslant 2$$

رابطهٔ وارون عبارت است از مجموعه

$$f^{-1}=\{(y, x) : y=x^2, \quad -2\leqslant x\leqslant 2\}$$

این مجموعه، اجتماع دو زیرمجموعهٔ زیراست

$$g_1=\{(y, x) : y=x^2, \ -2\leqslant x\leqslant 0\}$$

و

$$g_2=\{(y, x) : y=x^2, \ 0\leqslant x\leqslant 2\}$$

هر یك از این مجموعه‌ها یك تابع هستند. توابع g_1 و g_2 را می‌توان چنین بیان کرد

$$g_1=\{(y, -\sqrt{y}) : 0\leqslant y\leqslant 4\}$$

و

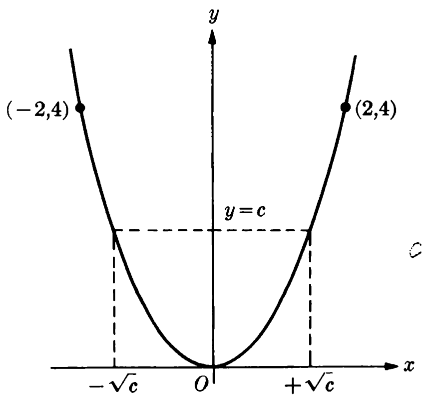
$$g_2=\{(y, \sqrt{y}) : 0\leqslant y\leqslant 4\}$$

اگر برای معرفی هرعدد در دامنهٔ g_1 و g_2 به‌جای y از x استفاده کنیم داریم

$$g_1=\{(x, -\sqrt{x}) : 0\leqslant x\leqslant 4\}$$

و

$$g_2=\{(x,\sqrt{x}) : 0\leqslant x\leqslant 4\}$$



شکل ۴۵. اگر $f(x)=x^2$، $-2\leqslant x\leqslant 2$، آنگاه f^{-1} یك رابطه است و یك تابع نیست.

تمرینها

وارون هر یك از توابع f که در زیرداده شده‌اند را به‌دست آورید. دامنهٔ هر یك ازآنها را مشخص کنید. نمودار هر یك از آنها و نمودار وارون آنها را رسم کنید.

۱. $f(x)=۲x-۳$، $-\infty<x<\infty$

۲. $f(x)=۲x-۳,\ -۱\leqslant x\leqslant ۱$

۳. $f(x)=x^۲,\ ۰\leqslant x\leqslant ۲$

۴. $f(x)=\frac{۱}{x+۱},\ x\neq -۱$

۵. $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}},\ x>۰$

۶. $f(x)=۲^{۱/x},\ x>۰$

۷. $f(x)=x^۲+۲x-۳,\ x\leqslant -۱$

۸. آیا تابع

$$f(x)=x^۲+۲x-۳,\ \ -۳\leqslant x\leqslant ۱$$

دارای وارون است؟ توضیح دهید!

برای هر یك از توابع f که در زیر تعریف شده‌اند، نشان دهید کــه آیا رابطهٔ وارون $f^{-۱}$ یك تابع است یا خیر.

۹. $f(x)=\frac{x}{x+۱},\ x\neq ۱$

۱۰. $f(x)=x+\frac{۱}{x},\ x\neq ۰$

۱۱. $f(x)=\sin x,\ ۰\leqslant x\leqslant \pi$

۱۲. $f(x)=\sin x\ ,-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$

۱۳. $f(x)=\tan x$، $۰<\left|x-\frac{\pi}{۲}\right|\leqslant\frac{\pi}{۲}$.

۱۴. $f(x)=\tan x$، $|x|<\frac{\pi}{۲}$.

۱۶. پیوستگی توابع وارون

فرض کنید f یك تابع و c یك نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است به طوری کــه f درآن نقطه پیوسته و g یك وارون f است. آیا لزوماً g در نقطهٔ $f(c)$ پیوسته است؟

مثال ۱. فرض کنید $f(x)=x^۳$ و $c=۲$. دراین‌صورت $g(x)=x^{۱/۳}$ و $f(c)=۸$.
سؤال این است‌که آیا g در نقطهٔ ۸ پیوسته است؟ به‌سادگی می‌توان در مورد این مثال با استفاده از روش ε، δ جواب را به‌دست آورد.

فرض کنید $\varepsilon>۰$. می‌خواهیم یك $\delta>۰$ به‌دست آوریم به‌طوری که

$$|g(x)-g(۸)|<\varepsilon \qquad \text{آنگاه}\ |x-۸|<\delta\ \text{اگر} \qquad (۱.۱۶)$$

g یك تابع افزایشی سره است، و اعدادی مانند $x_۱$ و $x_۲$ وجود دارند به‌طوری که

$$g(x_۱)=(x_۱)^{۱/۳}=۲-\varepsilon \qquad (۲.۱۶\ \text{الف})$$

$$g(x_۲)=(x_۲)^{۱/۳}=۲+\varepsilon \qquad (۲.۱۶\ \text{ب})$$

بدین منظور کافی است داشته باشیم

$$x_۱=(۲-\varepsilon)^۳, \qquad x_۲=(۲+\varepsilon)^۳ \qquad (۳.۱۶)$$

چون $\varepsilon > ۰$، لذا $x_۱ < ۸ < x_۲$ و اعداد

$$\delta_۱=۸-x_۱, \qquad \delta_۲=x_۲-۸ \qquad (۴.۱۶)$$

هر دو مثبت‌اند. فرض کنید $\delta=\min(\delta_۱, \delta_۲)$. در این صورت $\delta > ۰$ و

$$x_۱ < x < x_۲ \qquad \text{آنگاه}\ |x-۸|<\delta\ \text{اگر}$$

و

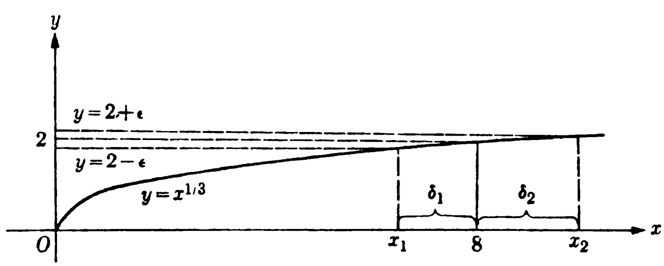
$$g(x_۱)=۲-\varepsilon<g(x)<۲+\varepsilon=g(x_۲)$$

بنابراین

$$|g(x)-g(۸)|=|g(x)-۲|<\varepsilon$$

شکل ۴۶، مراحل مختلف استدلال فوق را نشان می‌دهد.

آیا این مثال رهنمودی برای حالت کلی است؟ آیا حالتهای خاص دیگری نیز (غیراز حالتهای صریح $f(x)=x^۳$ و $g(x)=x^{۱/۳}$) وجود دارند که بتوانند مفید باشند؟ در اینجا ازاین مطلب که g افزایشی سره است، بهره‌مند شدیم واین مطلب نتیجهٔ آن است که تابع اصلی f افزایشی سره است. اگر g کاهشی سره باشد، لازم است تغییراتی جزئی در استدلال فوق به وجود آید. آیا می‌توانیم یك قضیهٔ اساسی پیوستگی برای توابع افزایشی(کاهشی) سرهٔ پیوسته اثبات کنیم؟ قضیهٔ زیرو اثبات آن نشان می‌دهد که جواب این سؤال مثبت است.



شکل ۴۶. تابع f، $f(x)=x^۳$، در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. وارون آن g، $g(x)=x^{۱/۳}$، درنقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

قضیهٔ ۲۴. فرض کنید f یك تابع افزایشی سرهٔ پیوسته روی دامنهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ باشد. در این صورت

۱. f دارای یك تابع وارون g است، و

۲. g روی دامنهٔ $f(a) \leqslant x \leqslant f(b)$ پیوسته است.

اثبات. از آنجا که f افزایشی سره است

اگر $a < x < b$، آنگاه $\qquad f(a) < f(x) < f(b)$

هم‌چنین

اگر $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$، آنگاه $\qquad f(x_1) < f(x_2)$

بنابراین اگر $f(a) < d < f(b)$، آنگاه معادله‌ای بـه صورت $f(x) = d$ حداکثر دارای یك جواب است. از طـرف دیگر، بنا برقضیهٔ مقدار میانی، چنین معادله‌ای حداقل دارای یك جواب است، زیرا f روی $[a, b]$ پیوسته است. از ترکیب ایـن دو مطلب نتیجه می‌گیریم که اگر

$$f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$$

آنگاه معادلهٔ $y = f(x)$، دارای یك جواب منحصر به‌فرد

$$x = g(y), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

است. بنابراین تابع g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g = \{(y, x) : y = f(x), f(a) \leqslant y \leqslant f(b)\}$$

یا با تعویض نقش x و y

$$g = \{(x, y) : x = f(y), f(a) \leqslant x \leqslant f(b)\}$$

واضح است کـه g یك تابع افزایشی سره است، زیرا اگر $y_1 < y_2$، $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$، آنگاه x_1 نمی‌تواند مساوی یا بزرگتراز x_2 باشد، پس $x_1 < x_2$؛ یعنی $g(y_1) < g(y_2)$. از تعریف g برمی‌آید که g وارون f است. پس فقط باید نشان داد که این g روی دامنهٔ خود پیوسته است.

نخست، فرض کنید که d یك نقطهٔ درونی دامنهٔ g باشد

$$f(a) < d < f(b)$$

دراین صورت، یك عدد منحصر به‌فرد c، $a < c < b$، وجود دارد به‌طوری که $f(c) = d$ و $c = g(d)$. گیریم $\varepsilon > 0$. اگـر می‌خواستیم روش مثال ۱ را دنبال کنیم می‌بایست درصدد یافتن x_1 و x_2ای باشیم به‌طوری که $g(x_1) = g(d) - \varepsilon$ و $g(x_2) = g(d) + \varepsilon$. ناچاریم دراین روش اصلاحاتی جزئی به‌عمل آوریم، زیرا ممکن است $g(d) - \varepsilon$ کوچکتر از a یا $g(d) + \varepsilon$ بزرگتر از b باشد. بنابراین قرار می‌دهیم

$$\varepsilon_1 = c - a, \qquad \varepsilon_2 = b - c$$

و به‌جای ε اولیه، عدد مثبت کوچکتر

$$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \tag{۵.۱۶}$$

را به‌کار می‌بریم. پس

$$a < c - \varepsilon_0 < c < c + \varepsilon_0 < b \tag{۶.۱۶}$$

و مقادیر منحصر به‌فردی مانند x_1 و x_2 وجود دارند به‌طوری که

$$x_1 = f(c - \varepsilon_0) < f(c) = d < f(c + \varepsilon_0) = x_2 \tag{۷.۱۶}$$

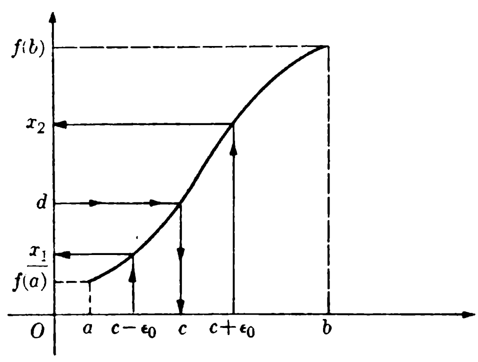
و

$$f(a) < x_1 < x_2 < f(b)$$

تساویها و نامساویهای (۷.۱۶) معادل‌اند با

$$g(x_1) = c - \varepsilon_0 < c = g(d) < c + \varepsilon_0 = g(x_2) \tag{۸.۱۶}$$

مراحل مختلف اثبات که در (۷.۱۶) و (۸.۱۶) بیان شد، در شکل ۴۷ نیز نشان داده شده است. از نقطهٔ d روی محور عمودی شروع کرده، و پیکانها را تا روی منحنی تعقیب و از آنجا عمودی به نقطهٔ c روی محور xها فرود می‌آوریم. سپس، از (۵.۱۶) استفاده کرده، نقاط $c-\varepsilon_0$ و $c+\varepsilon_0$ را روی این محور مشخص می‌کنیم. از این نقاط، پیکانها را به‌سمت بالا تا منحنی و از روی منحنی به‌طور افقی تا نقاط x_1 و x_2 روی محور عمودی تعقیب می‌کنیم.



شکل ۴۷. دامنهٔ g روی محور عمودی و دامنهٔ f روی محور افقی نشان داده شده است. منحنی مشخص شده، نمودار تابع f است. اگر محور عمودی را محور xها و محور افقی را محور yها بگیریم این منحنی نمودار تابع g است.

اکنون بـرای اثبات آخرین مرحله آماده‌ایم. اعـداد $d-x_1$ و x_2-d، بنا بر (۷.۱۶) هردو مثبت‌اند، و فرض می‌کنیم δ مینیمم این دو عدد باشد، یعنی

$$\delta=\min(d-x_1,\ x_2-d) \tag{۹.۱۶}$$

دراین‌صورت $\delta>0$ و اگر x در داخل فاصله‌ای به‌طول δ از d واقع باشد، لزوماً بین x_1 و x_2 قرار می‌گیرد، و در نتیجه $g(x)$ بین $c-\varepsilon_0$ و $c+\varepsilon_0$ واقع خواهد شد. در حالت کلی

$$|x-d|<\delta \quad \text{اگر}$$

آنگاه

$$x_1<x<x_2$$

$$c-\varepsilon_0=g(x_1)<g(x)<g(x_2)=c+\varepsilon_0$$

و

$$|g(x)-c|=|g(x)-g(d)|<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon$$

بنابراین g در نقطهٔ d پیوسته است.

بدین ترتیب اثبات کرده‌ایم که تابع g در هرنقطهٔ درونی دامنهٔ خود پیوسته است. درصورتی‌که $d=f(a)$ یا $d=f(b)$ باشد. بعضی تعدیلات جزئی لازم است. اساساً، هرگاه $d=f(b)$، آنگاه $c=d$، و ε_2 را از تعریف ε_0 و از هرجایی‌که به $c+\varepsilon_0$ و یا x_2 اشاره‌ای شده حذف می‌کنیم. هم‌چنین اگر $d=f(a)$ باشد تعدیلات مشابهی انجام می‌دهیم. این تعدیلات با تغییرات مناسبی در شکل ۴۷ واضح به نظر می‌رسد. (اثباتی که مربوط به این نقاط انتهایی است، در تمرینها داده شده است، و به درك اثبات بالا یاری می‌رساند.)

توضیح. گرچه قضیهٔ ۲۴ برای یك تابع افزایشی f بیان شده است، ولی این نتیجه برای تابع کاهشی سرهٔ f نیز معتبر است.

مثال ۲. فرض کنید $f(x)=1/\sqrt{x}$، $x>0$. دراین‌صورت f یك تابع کاهشی است زیرا

$$\text{اگر}\quad x_2>x_1>0،\quad \text{آنگاه}\quad f(x_2)<f(x_1)$$

برای یافتن تابع وارون، معادلهٔ

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad x>0$$

را برحسب x حل می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$x=1/y^2;\qquad x>0,\ y>0$$

و سپس جای x و y را تعویض می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y=1/x^{2}, \qquad y>0,\ x>0$$

بنابراین تابع g عبارت است از

$$g(x)=1/x^{2}, \qquad x>0$$

توجه کنیدکه g نیز یك تابع کاهشی سره است، و درجایی‌که مخرج آن صفر نباشد، پیوسته است. بنابراین، g در تمام دامنهٔ خود پیوسته است.

تمرینها

۱. باقیماندهٔ اثبات قضیهٔ ۲۴ را، درمورد پیوستگی g در نقطهٔ d، درحالتهای زیر تکمیل کنید:
(الف) $d=f(a)$،
(ب) $d=f(b)$.

۲. اگر f یك تابع کاهشی سره (بـه جای افزایشی سره) باشد، به چه طـریق تساویها و نامساویهای (۷.۱۶) و (۸.۱۶) تغییر می‌یابند؟ تساوی (۹.۱۶) چگونه تغییر می‌یابد؟ (از نمودار تابع اگر آن را مفید می‌دانید استفاده کنید.)

۳. اگر f یك تابع پیوسته ویك به‌یك روی‌دامنهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ باشد،ثابت‌کنید f یك تابع افزایشی سره یا کاهشی سره است.

۴. با همان علامت‌گذاری به کار رفته در اثبات قضیهٔ ۲۴، عبارات صریحی برای c، ε_0، x_1، x_2، و δ به‌ازای داده‌های زیر به‌دست آورید

(الف) $f(x)=x^{2}, \qquad a=0,\ b=3,\ d=4,\ \varepsilon=0/2$

(ب) $f(x)=1/x, \qquad a=1,\ b=2,\ d=3/4,\ \varepsilon=1/2$

تمرینهای اضافی*

۱. حد عبارتهای زیر را وقتی $n \to \infty$ به‌دست آورید.

(الف) $\frac{3n+2}{2n+3}$ (ب) $\frac{6n^2+2n+1}{n^3+n^2}$

(پ) $\frac{6n^3+2n+1}{n^3+n^2}$ (ت) $\frac{n^3}{n^2-n+1}-\frac{n^3+n}{n^2+n+1}$

(ث) $\frac{a_p n^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_0}{b_p n^p-b_{p-1}n^{p-1}+\cdots+b_0}$ ، $b_p \neq 0$.

(ج) $\frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$

۲. حد هر یك ازعبارتهای زیرداده شده است. در هرحالت عدد N را چنان پیدا کنیدکه برای $N<n$ تفاضل عبارت داده شده و حدش (۱) از ۱/۱۰ کوچکتر، (۲) از ۱/۱۰۰۰ کوچکتر، (۳) از ۱/۱۰۰۰۰۰۰ کوچکتر باشد.

(الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$ (ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n}{1+n}=-2$

(پ) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$ (ت) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=0$

---

* این مسائل توسط مترجمین ازکتاب زیر برداشته شده‌اند

Alert A. Blank, *Problems in Calculus and Analysis*; John Wiley and Sons, 1966.

(ث) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}=0$ (ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}=1$

(چ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{9}{10}\right)^n=0$

۳. حد عبارتهای داده شده را وقتی $n \to \infty$ به‌دست آورید.

(الف) $\dfrac{\sin(1/n)}{n}$ (ب) $\dfrac{\cos n}{n}$

(پ) $\sin\dfrac{1}{n}\cos n$ (ت) $\sin(\pi \cdot 2^{1/n-1})$

(ث) $\dfrac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$

۴. با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای، ثابت کنید که برای هرمقدار ثابت $h>0$ و هرعدد صحیح ثابت k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+h)^n}=0$$

۵. ثابت کنید برای هرعدد صحیح مثبت k

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[k]{n})^{1/n}=1$$

۶. ثابت کنید که برای هرعدد صحیح مثبت k

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^k+1}-\sqrt{n^k})=0$$

۷. روابط زیر را ثابت کنید.

(الف) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n})=1/2$.

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+5})=\infty$.

(پ) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2kn+1}-\sqrt{n^2+5}=k$، برای هر $k\geqslant 0$.

۸. برای هرعدد صحیح مثبت k، تفاضل زیررا درنظر می‌گیریم

$$D_n=\sqrt{a_{2k}n^{2k}+a_{2k-1}n^{2k-1}+\cdots+a_1n+a_0}$$
$$-\sqrt{b_{2k}n^{2k}+b_{2k-1}n^{2k-1}+\cdots+b_1n+b_0}$$

ثابت کنید که اگر $a_i \neq b_i$ برای هر $i > k$، آنگاه وقتی $n \to \infty$، D_n بهسمت بینهایت میل می‌کند، درصورتی که اگر $a_i = b_i$ برای $i > k$، آنگاه وقتی $n \to \infty$، D_n به سمت $(a_k - b_k)/(۲\sqrt{a_{۲k}})$ میل می‌کند.

۰۹. ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})\sqrt{n+(۱/۲)} = ۱/۲$.

۰۱۰. ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} (\sqrt[۳]{n+۱} - \sqrt[۳]{n}) = ۰$.

۰۱۱. فرض کنید $a_n = ۱۰^n/n!$. (الف) a_n به چه حدی میل می‌کند؟ (ب) آیا دنباله یکنواست؟ (پ) آیا از یك nای به‌بعد یکنواست؟ (ت) تقریبی از تفاضل بین a_n و حدش به‌دست دهید. (ث) ازچه مقدار n به‌بعد این تفاضل از ۱/۱۰۰ کمتراست.

۰۱۲. ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} n!/n^n = ۰$.

۰۱۳. (الف) ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} ((۱/n^۲)+(۲/n^۲)+\cdots+(n/n^۲)) = ۱/۲$.

(ب) ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{n^۲}+\frac{۱}{(n+۱)^۲}+\cdots+\frac{۱}{(۲n)^۲}\right) = ۰$$

(راهنمایی: مجموع را با بزرگترین جمله‌اش مقایسه کنید.)

(پ) ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{n}}+\frac{۱}{\sqrt{n+۱}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۲n}}\right) = \infty$$

(ت) ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}\right) = ۱$$

۰۱۴. ثابت کنید که هر کسر اعشاری متناوب معرف یك عدد گویا است.

۰۱۵. ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} (n^{۱۰۰})/(۱{,}۰۱^n)$ وجود دارد و مقدار آن را تعیین کنید.

۰۱۶. ثابت کنید که اگر a و b دوعدد مثبت و $b \leqslant a$، آنگاه دنبالهٔ $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ همگرا به a است. مشابهاً، برای هر k عدد مثبت ثابت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k نشان دهید که $\sqrt[n]{a_۱^n+a_۲^n+\cdots+a_k^n}$ همگراست وحد آن را به‌دست آورید.

۰۱۷. ثابت کنید که دنبالهٔ $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۲\sqrt{۲}}$، $\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}$، ... همگراست. حد آن را به‌دست آورید.

۰۱۸. اگر $\nu(n)$ تعداد عوامل اول n باشد، ثابت کنید که $\lim_{n \to \infty} \nu(n)/n = ۰$.

۱۹. ثابت کنید که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \zeta$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \zeta$، که در آن σ_n مساوی است با میانگین عددی a_iها، یعنی $\sigma_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

۲۰. پیدا کنید

(الف) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

(ب) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

۲۱. اگر $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

(راهنمایی: از هر عامل $\sqrt{n}$ را خارج کنید.)

۲۲. ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{n^2+n}=1$$

۲۳. فرض کنید که a_n یك دنبالهٔ داده شده است به طوری که دنبالهٔ $b_n = pa_n + qa_{n+1}$ برای $|p| > q$ همگراست. ثابت کنید a_n نیز همگراست. اگر $|p| \geqslant q > 0$ باشد نشان دهید که a_n همگرا نیست.

۲۴. کدام یك از دنبالههای زیر کراندار، کدام یك یکنوا، و کدام یك همگرا هستند؟

(الف) $a_n = (-1)^{n+1}$

(ب) $a_n = (-1)^{n+1}/n$

(پ) $a_n = 1 + [(-1)^n/n]$

(ت) $a_n = 1 - (1/n)$

(ث) $a_n = [1 + (-1)^n]/2$

(ج) $$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

(چ) $$s_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \cdots + \frac{n}{2n-1}$$

(ح) $$s_n = -1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \cdots + \frac{(-1)^n n}{2n-1}$$

(خ) $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(د) $s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

۲۵. ثابت کنید که هر یك از دنباله‌های زیر یکنوای افزایشی است.

(الف) $a_n = 2n^2 - 3n + 5$ (ب) $a_n = 3n^2 - 2n - 7$

(پ) $a_n = n/(n+1)$ (ت) $a_n = \sqrt{n^2 - 1}/n$

(ث) $a_n = n - (1/n)$

۲۶. ثابت کنید که هر یك از دنباله‌های زیر یکنوای کاهشی است.

(الف) $a_n = 2^{1/n}$ (ب) $a_n = \sin(\pi/2n)$

(پ) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

۲۷. حد عبارتهای زیر را وقتی $n \to \infty$ به‌دست آورید.

(الف) $\dfrac{n + \sqrt{n} - 1}{2n^2 - n^{1/n}}$ (ب) $\dfrac{2^{2/n} + n^p}{n^q - 1}, \quad q > p > 0$

(پ) $\dfrac{n^3 - 3n^2 + 4n - 1}{2n^3 - 3^{1/n} + n}$ (ت) $\dfrac{n\sin(1/n) + n^2}{2n - 1}$

(ث) $\dfrac{n^2 \cos(1/n) + n^{1/n}}{1 + n^2}$

۲۸. با استفاده از همگرایی دنباله‌های یکنوای کراندار، نشان دهید که کسرهای اعشاری بی‌پایان همگرا هستند و معرف اعداد حقیقی می‌باشند.

۲۹. (الف) فرض کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده است

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2 - a_n^2}{2a_n}$$

a_0 یك عدد دلخواه بزرگتر از 0 است. ثابت کنید دنبالهٔ a_n همگرا به $\sqrt{2}$ است.

(ب) به‌طور کلیتر، نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$، به‌طوری که

$$a_{n+1} = a_n + \frac{k - a_n^2}{2a_n}$$

$a_0 > 0$، برای هر عدد مثبت k همگرا به $\sqrt{k}$ است.

۳۰. فرض کنید a_1 و b_1 دوعدد حقیقی مثبت دلخواه است و $a_1 < b_1$. فرض کنید a_2 و b_2 مطابق زیر تعریف شده‌اند

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \qquad b_2 = (a_1 + b_1)/2$$

مشابهاً، فرض کنید

$$a_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \qquad b_3 = (a_2 + b_2)/2$$

و به‌طور کلی

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \qquad b_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$$

(الف) ثابت کنید که دنبالهٔ a_1، a_2، ... همگراست،

(ب) ثابت کنید که دنبالهٔ b_1، b_2، ... همگراست،

(پ) ثابت کنید که حد دو دنباله با هم مساوی است. (این حد به‌میانگین حسابی-هندسی a_1 و b_1 موسوم است.)

۳۱. ثابت کنید که حد دنبالهٔ

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

(الف) وجود دارد؛ (ب) مساوی ۲ است.

۳۲. ثابت کنید که حد دنبالهٔ

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

وجود دارد. نشان دهید که این حد کوچکتر از ۱ و بزرگتر یا مساوی ۱/۲ است.

۳۳. ثابت کنید که حد دنبالهٔ

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

وجود داشته و مساوی حد تمرین قبل است.

۳۴. فرض کنید a_1، b_1 دوعدد حقیقی مثبت و $a_1 \leqslant b_1$ است. فرض کنید

$$a_2 = \frac{2a_1 b_1}{a_1 + b_1}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

و در حالت کلی

$$a_n = \frac{2a_{n-1} b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

ثابت کنید که دنباله‌های a_1، a_2، ... و b_1، b_2، ... همگرا هستند و حد آنها یکی است.

۳۵. (الف) بدون استفاده ازقضیهٔ دوجمله‌ای نشان دهید که $a_n=(1+(1/n))^n$ یکنوای افزایشی و $b_n=(1+(1/n))^{n+1}$ یکنوای کاهشی است.

(ب) کدام یك از اعداد $(1000000)^{1000000}$ یا $(1000001)^{999999}$ بزرگترند؟

۳۶. اگر $a_n>0$، و $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)=L$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

۳۷. با استفاده از تمرین بالا حد دنباله‌های زیررا به‌دست آورید.

(الف) $\sqrt[n]{n}$ ، (ب) $\sqrt[n]{n^5+n^4}$ ، (پ) $\sqrt[n]{n!/n^n}$

۳۸. (الف) مجموع زیر را حساب کنید

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

(ب) با استفاده از نتیجهٔ بالا نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست.

۳۹. فرض کنید p و q دو عدد طبیعی دلخواه است. حساب کنید

(الف)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)}$$

(ب)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+p)(k+p+q)}$$

۴۰. حساب کنید

(الف)
$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(ب)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$$

(پ) حد هریك ازعبارتهای فوق را وقتی $n\to\infty$ به‌دست آورید.

(ت) فرض کنند a_1، a_2، ...، a_m اعداد صحیح غیرمنفی هستند و $a_1<a_2<\cdots<a_m$. نشان دهید که چگونه فرمولی برای مجموع زیر به‌دست آوریم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_m)}$$

و چگونه $\lim_{n\to\infty}S_n$ را حساب کنیم.

۴۱. اگر a_k یکنوا و $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ همگرا باشد، نشان دهید که $\lim_{k\to\infty}ka_k=0$.

۴۲. اگر a_k یکنوای کاهشی با حده و به‌ازای جمیع kها، $b_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0$
باشد، نشان دهید که $\sum_{k=1}^{\infty} kb_k = a_1$.

۴۳. حدهای زیر را به‌دست آورید، در هر مرحله مشخص کنید از چه قضیه‌ای استفاده کرده‌اید.

(الف) $\lim\limits_{x \to 2} 3x$ (ب) $\lim\limits_{x \to 3} 4x+3$

(پ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+2}$ (ت) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{5+\sqrt[3]{2x^5}}$

(ث) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\sin x)$ (ج) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\pi \dfrac{\sin x}{x}\right)$

۴۴. ثابت کنید که

(الف) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$ (ب) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x} = 1$

(پ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x} = 0$

۴۵. مشخص کنید که حدهای زیر وجود دارند یا خیر، و در صورت وجود مقادیر آنها را به‌دست آورید.

(الف) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$ (ب) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

(پ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

۴۶. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 0$$

۴۷. ثابت کنید که

(الف) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha}$ (ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+\cos x}{x+1} = 1$

(پ) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos\dfrac{1}{x} = 1$

۴۸. (الف) فرض کنید $f(x)$ مطابق معادلهٔ $y=6x$ تعریف شده است. عدد δ، وابسته به ξ، را چنان کوچك انتخاب کنید که اگر $|x-\xi|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$، به‌شرطی که (۱) $\varepsilon=1/10$؛ (۲) $\varepsilon=1/100$؛ (۳) $\varepsilon=1/1000$. همین عمل را برای توابع زیر انجام دهید.

(ب) $f(x)=x^2-2x$ (پ) $f(x)=3x^4+x^2-7$

(ت) $f(x)=\sqrt{x},\ \ x\geqslant 0$ (ث) $f(x)=\sqrt{x^2}$

۴۹. (الف) فرض کنید $f(x)=6x$ درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 10$. عدد δ را به‌قدری کوچك انتخاب کنید که اگر $|x_1-x_2|<\delta$، آنگاه $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$، به‌شرطی که (۱) $\varepsilon=1/100$؛ (۲) ε دلخواه و بزرگتر از صفر باشد. همین عمل را برای توابع زیرهم انجام دهید.

(ب) $-1\leqslant x\leqslant 1$ $\quad f(x)=x^2-2x,$

(پ) $2\leqslant x\leqslant 4$ $\quad f(x)=3x^4+x^2-7,$

(ت) $0\leqslant x\leqslant 4$ $\quad f(x)=\sqrt{x},$

(ث) $-2\leqslant x\leqslant 2$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2},$

۵۰. مشخص کنید کدام‌یك از توابع زیر پیوسته است. برای آنهایی که ناپیوسته‌اند، نقاط ناپیوستگی را مشخص کنید.

(الف) $x^2\sin x$ (ب) $x\sin^2(x^2)$

(پ) $(1/x)\sin x$ (ت) $(\sin x)/\sqrt{x}$

(ث) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+8}$ (ج) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+9}$

(چ) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+10}$ (ح) $\tan x$

(خ) $1/\sin x$ (د) $\cot x$

(ذ) $1/\cos x$ (ر) $x\cot x$

(ز) $(\pi-x)\tan x$ (ژ) $\operatorname{sgn} x$

۵۱. ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)/(x+1)=2$. عدد δ را طوری تعیین کنید که اگر $|x|<\delta$، آنگاه قدرمطلق تفاضل ۲ و $(x+2)/(x+1)$، (الف) از ۰٫۱، $1/10$، (ب) از $1/1000$، ۰٫۱، (پ) از ε، $\varepsilon>0$، کوچکتر باشد.

۵۲. (الف) ثابت کنید که $\lim_{x\to ۱}(x+۲)/(x+۱)=۳/۲$. عدد δ را چنان تعیین کنید که اگر $|x-۱|<\delta$، آنگاه قدرمطلق تفاضل $۳/۲$ و $(x+۲)/(x+۱)$ از $\varepsilon>۰$ کوچکتر باشد. همین عمل را برای توابع زیر انجام دهید.

(ب) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{۱+x^{۲}}$ (پ) $\lim_{x\to ۰}\sin x/x$

۵۳. ثابت کنید که

(الف)
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\frac{۱}{۲}$$

(ب)
$$\lim_{x\to \infty}\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}\left(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}\right)=\frac{۱}{۲}$$

۵۴. ثابت کنید که

(الف) $\lim_{x\to ۳}۱/x=۱/۳$ (ب) $\lim_{x\to c}۱/x=۱/c$

۵۵. ثابت کنید که

(الف) $\lim_{x\to ۰}(x^{۲}-۲x+۱)=۱$ (ب) $\lim_{x\to ۳}\dfrac{x^{۳}-۲۷}{x-۳}=۲۷$

۵۶. به‌فرض معلوم بودن $\varepsilon>۰$، مطلوب است عددی مانند M به‌طوری که

$$t>M \implies \left|\frac{t^{۲}+۱}{t^{۲}-۱}-۱\right|<\varepsilon$$

۵۷. عدد مثبت ε داده شده است، عدد $\delta>۰$ را چنان تعیین کنید که اگر $۰<t-۱<\delta$، آنگاه

$$\sqrt{t^{۲}-۱}<\varepsilon$$

۵۸. ثابت کنید که

$$\lim_{x\to \div}\frac{۲x^{۴}-۶x^{۳}+x^{۲}+۳}{x-۱}=-۸$$

۵۹. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۱+e^{-۱/x}}$$

۶۰. (الف) ثابت کنید که $\lim_{m\to\infty}(\cos \pi x)^{۲m}$ وجود دارد و مساوی ۱ یا ۰ است، برحسب

اینکه x یك عدد صحیح باشد یا نباشد.

(ب) ثابت‌کنید که $\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\,\pi x)^{2m}]$ وجود دارد ومساوی ۱ یا ه است، برحسب اینکه x یك عدد گویا یا گنگ باشد.

(پ) پیوستگی این توابع حدی را بررسی کنید؟

۶۱. فرض کنید $f(x)$ یك تابع پیوسته روی فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ است. به‌علاوه فرض کنید که $f(x)$ فقط مقادیر گویا را انتخاب می‌کند و $f(x) = 1/2$ اگر $x = 1/2$. ثابت‌کنید که همه‌جا $f(x) = 1/2$.

۶۲. فرض‌کنید $f(x)$ یك تابع حقیقی است که درمعادلهٔ

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad \forall x\in\mathbf{R},\ \forall y\in\mathbf{R}$$

صدق می‌کند. تابع $f(x)$ را به‌ازای مقادیر گویای x مشخص کنید وثابت‌کنید که اگر $f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه $f(x)=cx$ به‌طوری‌که c یك عدد ثابت است.

۶۳. (الف) اگر $f(x)=x^n$، عدد δ وابسته به ε و x_0 را چنان پیدا کنید که اگر $|x-x_0|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(ب) مسئلهٔ قبل را برای تابع زیر حل‌کنید

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0, \qquad a_n\neq 0$$

۶۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to+\infty}(1+(1/n))^n$.

۶۵. ثابت‌کنید که برای هرعدد گویای $x>0$، $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

۶۶. ثابت‌کنید که برای $a_n=(1+(1/n^k))^n$ داریم $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ هرگاه $k>1$، در صورتی‌که برای $k<1$ داریم $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

۶۷. ثابت‌کنید که $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

۶۸. ثابت‌کنید که $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

۶۹. ثابت‌کنید $\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e$.

۷۰. ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}=e^{1/a}$.

۷۱. نشان دهیدکه $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

۷۲. نشان دهیدکه $\lim_{x\to a}\frac{x^\lambda-a^\lambda}{x-a}=\lambda a^{\lambda-1}$.

۷۳. نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{1/x} & x\neq 0\\ e^{3} & x=0\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

۷۴. تعیین کنید کدام یك از توابع زیر پیوسته‌اند. توابعی که پیوسته نیستند نقاط ناپیوستگی آنها را تعیین کنید.

(الف) $1/(1-x^2)$ (ب) $1/(1+x^2)$

(پ) $x/(1-|x|)$ (ت) $x/(1+|x|)$

(ث) $\dfrac{x}{1+x}$ (ج) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+8}$

(چ) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+9}$ (ح) $\dfrac{x^3+3x+7}{x^2-6x+10}$

(خ) $f(x)=\begin{cases}\sin 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (د) $f(x)=\begin{cases}x\sin 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

ادعای خود را در ارتباط با توابع قسمت (خ) و (د) اثبات کنید.

۷۵. (الف) پیوستگی یکنواخت توابع زیر را روی تمام اعداد حقیقی بررسی کنید. عدد δ وابسته به ε را پیدا کنید.

$$f(x)=x,\qquad f(x)=1/(1+|x|),\qquad f(x)=x/(1+x^2)$$

(ب) ثابت کنید که توابع زیر پیوستهٔ یکنواخت نیستند.

$$f(x)=1/(1+x),\qquad f(x)=x^2,\qquad f(x)=x^2/(1+|x|)$$

۷۶. تابع f که به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x معین است و عدد مثبت c چنان مفروضند که به‌ازای هرمقدار حقیقی h رابطهٔ

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant ch^2$$

برقرار است. ثابت کنید که $f(x)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

جواب تمرینها

۱

۱. ۲   ۲. ۲   ۳. ۰   ۴. ۲

۲

۱. $L=۲$، N هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۱۰۱   ۲. $L=۲$، $N\geqslant ۷$

۳. $L=۱/۲$، $N\geqslant ۵$ ۴. $L=۳/۴$، $N\geqslant ۶$

۳

۱. N هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱/ε   ۲. N هر عدد طبیعی بزرگتر از $\sqrt{۱/\varepsilon}$

۳. (الف) ۲/۳، (ب) ۱/۲، (پ) ۱۷/۶، (ت) ۱/۶، (ث) ۸/۹

۴. ۰   ۵. ۱/۲   ۶. $\sqrt{۳}$

۴

۲. دنباله یکنوای افزایشی و از بالا به‌وسیلهٔ ۲ کراندار است.

۳. (ب) $S_n=۱-[۶/(n+۱)]$، بنابراین دارای حد ۱ است.

۴. $T_n<S_n<۱$ و $T_{n+۱}>\Gamma_n$.

۷. بله، حدش برابر ۲ است.   ۸. (الف) $n^۲+۲n<(n+۱)^۲$

۵

۱. ۲/۳   ۲. ۰   ۳. ۵/۶   ۴. ۳/۴

۵. ۱/۳   ۶. ۱/۲   ۷. ۳/۵   ۸. ۳/۵

۹. ۰   ۱۰. ۱   ۱۱. ۱/۲   ۱۲. ۰

۱۳. برای هر $\theta \neq ۰$ راست است. ۱۴. $۲/۵$ ۱۵. ۰
۱۶. ۰ ۱۷. حد وجود ندارد ۱۸. ۰
۱۹. $\sqrt{۳/۵}$ ۲۰. برای $x \geqslant ۱/۵$ تعریف نشده است، پس حد ندارد.
۲۱. حد وجود ندارد.

۶

۱. ۳ ۲. ۰ ۳. $۶x_۱$ ۴. -۲
۵. $-۲/x_۱^۲$ ۶. $۱/۶$ ۷. $۱/(۲\sqrt{x_۱})$ ۸. ۸
۹. $۲ax_۱+b$ ۱۰. $۳x_۱^۲$ ۱۱. ۴ ۱۲. $۲t_۱$
۱۳. $۲at_۱+b$ ۱۴. $-۱/۱۶$ ۱۵. $-۱/(t_۱+۱)^۲$
۱۶. $۱/\sqrt{۲t_۱+۱}$

۷

۱. (الف) آری، $f(۱)=۱$.
(ب) خیر؛ دو زوج مرتب $(۱,۱)$ و $(۱,۰)$، دارای عضوهـای اول $x=۱$ هستند، ولی عضوهای دوم آنها با هم برابر نیست.
(پ) هشت تابع متمایز $f_۱, f_۲, \ldots, f_۸$ که مقادیرشان درجدول زیرنشان داده شده است، وجود دارند. به‌عنوان مثال، $f_۳=\{(۱,۰), (۲,۱), (۳,۰)\}$.

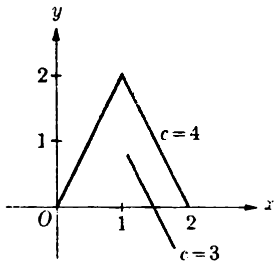
	$f_i(۱)$	$f_i(۲)$	$f_i(۳)$
$f_۱$	۰	۰	۰
$f_۲$	۰	۰	۱
$f_۳$	۰	۱	۰
$f_۴$	۱	۰	۰
$f_۵$	۱	۱	۰
$f_۶$	۱	۰	۱
$f_۷$	۰	۱	۱
$f_۸$	۱	۱	۱

۲. (الف) تابع؛ برد $۰ \leqslant f(x) \leqslant ۱$.
(ب) تابع؛ برد $۰ \leqslant f(x) \leqslant ۱$.

(پ) یک تابع از X در Y نیست، زیرا برد آن $-۱ \leqslant y \leqslant ۱$ زیرمجموعهٔ Y نیست.
(ت) تابع، برد $۰ \leqslant f(x) \leqslant ۱$.
(ث) تابع، برد $۰ \leqslant f(x) \leqslant ۱$.

۳. f فقط در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است. وقتی $x = ۰$ است قرار دهید $\delta = \varepsilon$. اما به‌ازای هر $x \neq ۰$، درهرهمسایگی x اعداد گویا و گنگ وجود دارند، و برای $\varepsilon = (۱/۲)|x|$ هیچ δای متناظر نمی‌شود.

۴. اگر $c = ۴$، تابع در نقطهٔ ۱ پیوسته است.



شکل مسئلهٔ ۴

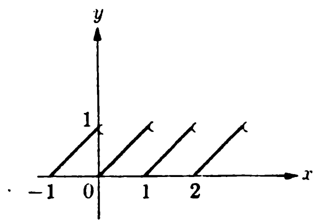
۵. (الف) درست. (ب) نادرست؛ قرار دهید $a = b = ۱$.
(پ) نادرست؛ قرار دهید $a = b = ۱$. (ت) نادرست؛ قرار دهید $a = -b = ۱$.
(ث) درست. (ج) نادرست؛ قرار دهید $a = b = ۱$.
(چ) نادرست؛ قرار دهید $a = ۱,\ b = ۰$.
(ح) نادرست؛ قرار دهید $a = ۱,\ b = -۲$.
(خ) درست؛ زیرا

$$|a| = |a - b + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

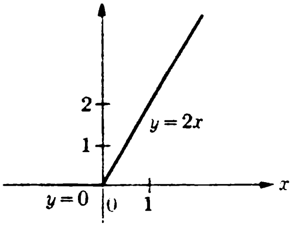
(د) درست. (ذ) درست.

۶. فرمول (۱۵٫۷) تبدیل به $q^۲ > ۱/\varepsilon$ می‌شود؛ سلسله اعداد (۱۶٫۷) تا $[۱/\sqrt{\varepsilon}]$ ادامه می‌یابد؛ اگر $n = [۱/\sqrt{\varepsilon}]$، تغییری در (۱۷٫۷) حاصل نمی‌شود. تابع جدید در هر نقطهٔ گنگ، پیوسته است، اما در نقاط گویا ناپیوسته می‌باشد.

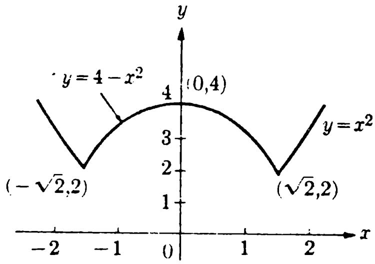
۷.



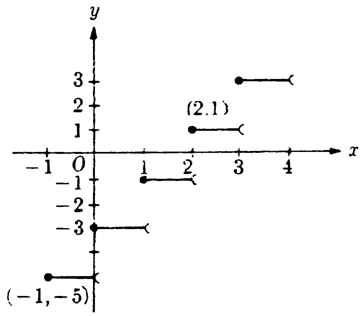
(الف)



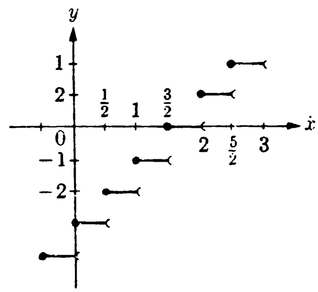
(ب)



(پ) و (ت)



(ج)



(ث)

۸. (الف) c وسط پاره‌خط از a تا b؛ d فاصلهٔ نقطهٔ میانهٔ پاره‌خط تا انتهای آن می‌باشد.

(ب) تمام مقادیر x، از a تا b وخود نقاط a و b.

(پ) اگر از نقطهٔ c شروع و d را به‌آن بیفزاییم، به‌نقطهٔ انتهایی سمت راست فاصله، که ماکزیمم a و b نیز هست، می‌رسیم. اگراز نقطهٔ c شروع و d را از آن بکاهیم، به نقطهٔ انتهایی سمت چپ فاصله‌که مینیمم a و b نیز هست، می‌رسیم.

(ت) حالت ۱. اگر $a \geqslant b$، آنگاه $|a-b| = a-b$ و

$$\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}|a-b| = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} = a = \max(a, b)$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}|a-b| = \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2} = b = \min(a, b)$$

حالت ۲. اگر $b > a$، آنگاه $|a-b| = b-a$ و فرمول اولی برابر $b = \max(a, b)$ شود، درحالی‌که، فرمول دومی برابر $a = \min(a, b)$ می‌شود.

۹. با استقرا روی n، ثابت کنید. نتیجه برای $n = 1$ درست است. اگر برای $n = k$ درست و S دارای $k+1$ عضو باشد، قرار می‌دهیم $S = S_1 \cup S_2$ که S_1 دارای

k عضو و S_2 دارای یك عضو می‌باشد. طبق فرض، S_1 دارای یك ماکزیمم مـانند a و S_2 نیز دارای یك ماکزیمم مانند b است. در این صورت

$$\max(a,\ b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

یك ماکزیمم برای S است.

۱۰. همان روش مسئلهٔ ۹ را به‌کار برده و به‌جای ماکزیمم از مینیمم استفاده کنید و قرار دهید: $a=\min(S_1)$ و $b=\min(S_2)$، دراین صورت

$$\min(a,\ b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

برابراست با $\min(S_1\cup S_2)$.

۱۱. فاصلهٔ باز $0<x<1$

۱۲. فرض کنید $h=\min(a,\ 1-a)$. چـون $0<a<1$، لذا a و $1-a$ هر دو مثبت‌اند، و $N_h(a)$ در درون فاصلهٔ $0<x<1$ واقع است، زیرا

$$0\leqslant a-h<a+h\leqslant 1$$

$a-h$ $\quad$ a $\quad$ $a+h=1$

در این نمایش a نزدیکتر به ۱ است، بنابراین $h=1-a$ و $a+h=1$.

۱۳. فـرض کنید $a\neq 0$، و $\varepsilon>0$، در ایـن صورت اگر $|x|>(1/2)|a|$ و $|x-a|<\varepsilon a^2/2$، آنگاه

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x-a|}{|ax|}<\frac{2|x-a|}{a^2}<\varepsilon$$

قرار دهید

$$\delta=\min\left(\frac{1}{2}|a|,\ \frac{\varepsilon a^2}{2}\right)$$

۱۴. اگر f و g هر دو در نقطهٔ a پیوسته و $\varepsilon>0$ باشد، اعداد مثبت δ_1 و δ_2 وجود دارند به‌طوری که

اگر $x\in D_f$ و $|x-a|<\delta_1$، آنگاه $\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$

و

اگر $x\in D_g$ و $|x-a|<\delta_2$، آنگاه $\quad |g(x)-g(a)|<\varepsilon/2$

قرار دهید $\delta=\min(\delta_۱, \delta_۲)$. توجه داشته باشید که $D_{f+g}=D_f\cap D_g$.

۱۵. فرض کنید f و g هردو درنقطهٔ a پیوسته و $\varepsilon>۰$ است. اعداد مثبت $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$ وجود دارند به‌طوری که

اگر $x\in D_f$ و $|x-a|<\delta_۱$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<۱$

اگر $x\in D_g$ و $|x-a|<\delta_۲$، آنگاه $|g(x)-g(a)|<\dfrac{\varepsilon}{۲(۱+|f(a)|)}$

اگر $x\in D_f$ و $|x-a|<\delta_۳$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<\dfrac{\varepsilon}{۲(۱+|g(a)|)}$

فرض کنید $\delta=\min(\delta_۱, \delta_۲, \delta_۳)$ و $x\in D_f\cap D_g$ و $|x-a|<\delta$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(a)g(a)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)|\\ &\leqslant |f(x)|\,|g(x)-g(a)|+|g(a)|\,|f(x)-f(a)|\\ &<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon\end{aligned}$$

زیرا، $|f(x)|<۱+|f(a)|$ و $|g(a)|/۱+|g(a)|<۱$.

۱۶. فرض کنید f در نقطهٔ a پیوسته و $f(a)\neq ۰$ و $\varepsilon>۰$ است. دراین صورت

$$\left|\frac{۱}{f(x)}-\frac{۱}{f(a)}\right|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{f(x)f(a)}\right|\leqslant\frac{۲}{|f(a)|^۲}|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

به‌شرطی که $|f(x)|\geqslant(۱/۲)|f(a)|$ و $|f(x)-f(a)<(۱/۲)\varepsilon|f(a)|^۲$.
طبق فرض، اعداد مثبت $\delta_۱$ و $\delta_۲$ وجود دارند به‌طوری که

اگر $x\in D_f$ و $|x-a|<\delta_۱$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<(۱/۲)|f(a)|$

و

اگر $x\in D_f$ و $|x-a|<\delta_۲$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<(۱/۲)\varepsilon|f(a)|^۲$

اکنون، قرار می‌دهیم $\delta=\min(\delta_۱, \delta_۲)$.

۸

۱. (الف) فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲x, & ۰\leqslant x<\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}-۲x, & \frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant ۱\end{cases}$$

(ب) فرض کنید به‌ازای $x \neq 1/2$ و $f(1/2)=2$ داشته باشیم
$$f(x)=1/(1-2x)$$

۲. (الف) $f(x)=\sin x$، $\max=1$، $\min=-1$.

(ب) $f(x)=1/(1+x^2)$.

(پ) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{به‌ازای } x \text{ گویا} \\ 0 & \text{به‌ازای } x \text{ گنگ} \end{cases}$، $\max=1$ و $\min=0$.

(ت) $f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{به‌ازای } x \text{ گنگ} \\ -x^2 & \text{به‌ازای } x \text{ گویا} \end{cases}$.

نمودار آن شامل نقاطی از سهمی $y=1+x^2$ است که x آن گنگ و شامل نقاطی از سهمی $y=-x^2$ است که x آن گویا باشد.

۹

۱. فرض کنید $g(x)=-f(x)$. اگر f پیوسته باشد، g نیز پیوسته است. طبق قضیهٔ ۱۸، g دارای یك ماکزیمم، مثلاً در نقطه‌ای مانند c است. بنابراین از $g(x) \leqslant g(c)$ نتیجه می‌شود $-f(x) \leqslant -f(c)$ یا $f(x) \geqslant f(c)$. پس f دارای یك مینیمم در نقطهٔ c است.

۱۰

۱. $n=888$.

۲. $h=0{,}02$. اگر $n=250$، آنگاه همسایگیهای به شعاع h و به مراکز
$$0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ nh=5$$
تشکیل چنین پوشش باپایانی می‌دهند.

۱۱

۱. (الف) به‌جواب تمرین ۱۳ از بخش ۷ رجوع کنید.

(ب) اثبات غیر مستقیم. فرض کنید f روی D پیوستهٔ یکنواخت است. قرار دهید $\varepsilon=1$. طبق فرض، $\delta>0$ای وجود دارد به‌طوری که اگر x_1 و x_2 متعلق به D و $|x_2-x_1|<\delta$، آنگاه $|f(x_2)-f(x_1)|<1$. یك تعداد باپایان، مثلاً N، از فواصل باز به طول δ و به مراکز $\delta/2,\ \delta,\ 3\delta/2,\ \ldots,\ N\delta/2$، D را می‌پوشانند.

از اینجا نتیجه می‌شود که f کراندار است؛ زیرا

$$|f(x)| < ۱ + \max\left\{f\left(\frac{\delta}{۲}\right), f(\delta), \ldots, f\left(\frac{N\delta}{۲}\right)\right\} = ۱ + \frac{۲}{\delta}$$

ولی این غلط است، زیرا $f(x) = ۱/x$ روی دامنهٔ $۱ > x > ۰$ دارای برد کراندار نیست. بنابراین f روی D پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۰۲ (الف) و (ب)، فرض کنید $\varepsilon > ۰$، $x_۱ \geqslant ۱$، $x_۲ \geqslant ۱$. دراین صورت $|x_۱ x_۲| \geqslant ۱$ بوده و داریم

$$\left|\frac{۱}{x_۱} - \frac{۱}{x_۲}\right| = \frac{|x_۲ - x_۱|}{|x_۱ x_۲|} \leqslant |x_۲ - x_۱|$$

قرار دهید $\delta = \varepsilon$.

۰۳ (الف) نخست، نامساوی $|\sin\theta| < |\theta|$، $(\theta \neq ۰)$ را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $۰ < \theta < \pi/۲$، قطاع AOP، به‌شعاع ۱ و زاویهٔ مرکزی θ رادیان را در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث محصور در آن (مثلث AOP) برابر $(۱/۲)\sin\theta$ است در حالی که مساحت خود قطاع برابر $(۱/۲)\theta$ است. بنابراین برای $۰ < \theta < \pi/۲$، $\sin\theta < \theta$. برای مقادیر منفی θ، بین $-\pi/۲$ و θ، فرض کنید $\alpha = -\theta$. در این صورت $\sin\theta = -\sin\alpha$ و

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| = \frac{\sin\alpha}{\alpha} < ۱$$

بنابراین

$$|\sin\theta| < |\theta|$$

پس نامساوی را برای $۰ < |\theta| < \pi/۲$ ثابت‌کردیم. وقتی $|\theta| \geqslant \pi/۲$، نامساوی بدیهی است، زیرا

$$|\sin\theta| \leqslant ۱ < \pi/۲$$

اکنون از هر دو طرف تساوی زیر قدرمطلق می‌گیریم

$$\sin x_۱ - \sin x_۲ = ۲\cos\left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}\right)\sin\left(\frac{x_۱ - x_۲}{۲}\right)$$

و یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق حاصل ضرب دو عامل برابر است با حاصل ضرب قدرمطلقهای آن دو عامل، و به ازای هر θ، نامساوی $|\cos\theta| \leqslant ۱$ برقرار است. بنابراین

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\frac{\cos(x_1+x_2)}{2}\right|\left|\frac{\sin(x_1-x_2)}{2}\right|$$

$$\leqslant 2(1)|(x_1-x_2)/2| = |x_1-x_2|$$

(ب) اگر $\varepsilon > 0$ باشد قرار می‌دهیم $\delta = \varepsilon$ و با استفاده از قسمت (الف) داریم

اگر $|x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$، آنگاه $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2| < \varepsilon$

۴. قرارمی‌دهیم $\varepsilon = 1$. چون f روی $a < x < b$ پیوستهٔ یکنواخت است، $\delta > 0$ای وجود دارد به‌طوری‌که وقتی $a < x_1$ و $x_2 < b$، آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. فاصلهٔ باز $a < x < b$ می‌تواند توسط تعداد باپایانی از فواصل

$$N_\delta(c_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \; a < c_1 < c_2 < \cdots < c_N < b$$

پوشیده شود. پس به‌ازای هر x، $a < x < b$، یك مقدار c_i وجود دارد به‌طوری‌که اگر $|x - c_i| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(c_i)| < 1$. بنابراین

$$|f(x)| < 1 + \max\{|f(c_i)| : i = 1, 2, \ldots, N\}$$

۵. $\delta = \varepsilon/6$ ‏ ۶. $\delta = \varepsilon/12$ ‏ ۷. $\delta = \varepsilon/2$

۸. $\delta = \varepsilon/3$ ‏ ۹. $\delta = \varepsilon/3$

۱۰. $\delta = \varepsilon^2$. [راهنمایی: نخست نشان دهید که اگر $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$، آنگاه $0 \leqslant \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2 - x_1}$.]

۱۲

۱. $x_1 = a$، x_2 برابر مؤلفهٔ E روی‌محور xها، x_3 مؤلفهٔ A روی این محور، $x_4 = b$ است.

۲. $x_1 = \mathrm{lub}(S)$. ‏ ۳. $f(x_2) = c$.

۴. (الف) aها تشکیل یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی می‌دهند که از بالا کراندار است؛ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد.

(ب) bها تشکیل یك دنبالهٔ یکنوای کاهشی می‌دهند که از پایین کراندار است.

(پ)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

(ت) چون f درنقطهٔ x پیوسته و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$ است، داریم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

در این صورت، یا $f(b_n) \leqslant 0 \leqslant f(a_n)$، و یا $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$. با حد گرفتن، هنگامی که $n \to \infty$، نتیجه می‌شود $f(x) \leqslant 0 \leqslant f(x)$. بنا بر این $f(x) = 0$.

۱۳

۱. $f_1(x) = 2\sqrt{x} + 1, \quad x \geqslant 0$

$f_2(x) = \sqrt{2x+1}, \quad x \geqslant -1/2$

۲. $f_1(x) = 1/(1+x), \quad x \neq 0, \quad x \neq -1$

$f_2(x) = 1 + (1/x), \quad x \neq 0, \quad x \neq -1$

۳. $f_1(x) = \sqrt{(1/x) - 1}, \quad 0 < x \leqslant 1$

$f_2(x) = 1/\sqrt{x-1}, \quad x > 1$

۱۴

۱. $f(x) = 17 - 8x, \quad \delta = \varepsilon/8$

۲. $f(x) = 3\sin x, \quad \delta = \varepsilon/3$

۳. $f(x) = x, \quad x \neq 0, \quad \delta = \varepsilon$

۴. $f(x) = \sin^2 x, \quad \delta = \varepsilon/2$

۵. $f(x) = \sin(x^2)$، $\delta = \min\{1, \varepsilon/(1+2|c|)\}$

۱۵

۱. $f^{-1}(x) = (x+3)/2, \quad -\infty < x < \infty$

۲. $f^{-1}(x) = (x+3)/2, \quad -5 \leqslant x \leqslant -1$

۳. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$

۴. $f^{-1}(x) = (1-x)/x, \quad x \neq 0$

۵. $f^{-1}(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

۶. $f^{-1}(x) = \log 2/\log x = \log_x^2, \quad x > 1$

۷. $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+4}, \quad x \geqslant -4$

۸. خیر، زیرا $f(x) = (x+1)^2 - 4$ از دامنهٔ $-3 \leqslant x \leqslant 1$ در برد $-4 \leqslant y \leqslant 0$ یك به‌یك نیست. اگر $-4 \leqslant y \leqslant 0$، به‌ازای هر $y = x^2 + 2x - 3$ دومقدار برای

x به‌دست می‌آید.

۹. $f^{-1}(x)=x/(1-x)$، $x\neq 1$، یك تابع است.

۱۰. f^{-1} یك تابع نیست.

۱۱. f^{-1} یك تابع نیست.

۱۲. f^{-1} یك تابع است.

۱۳. f^{-1} یك تابع نیست.

۱۴. f^{-1} یك تابع است.

۱۶

۱. (الف) اگر $d=f(a)$، آنگاه $g(d)=a$. فرض کنید $\varepsilon>0$، $\varepsilon_2=b-a$، و $\varepsilon_0=\min(\varepsilon,\varepsilon_2)$. یك x_2 منحصر به‌فردی وجود دارد به‌طوری که $x_2=f(a+\varepsilon_0)$ و $\delta=x_2-d>0$. اگر $d\leqslant x<d+\delta=x_2$، آنگاه

$$g(d)=a\leqslant g(x)<g(x_2)=a+\varepsilon_0\leqslant a+\varepsilon$$

بنابراین $|g(x)-g(d)|<\varepsilon$.

(ب) اگر $d=f(b)$، آنگاه $g(d)=b$. فرض کنید $\varepsilon>0$، $\varepsilon_1=b-a$، و $\varepsilon_0=\min(\varepsilon,\varepsilon_1)$. یك x_1 منحصر به‌فردی وجود دارد به طوری که $x_1=f(b-\varepsilon_0)$ و $\delta=d-x_1>0$. اگر $x_1=d-\delta<x\leqslant d$، آنگاه

$$b-\varepsilon_0=g(x_1)<g(x)\leqslant g(d)=b$$

بنابراین $|g(x)-g(d)|<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon$.

۲. جهت نامساویها را در (۷.۱۶) عوض کنید، ولی در (۸.۱۶) عوض نکنید. (۹.۱۶) را به $\delta=\min(x_1-d,\ d-x_2)$ تغییر دهید.

۳. چون f یك به‌یك و $a<b$ و می‌دانیم که $f(b)\neq f(a)$ است. پس درست دو حالت وجود دارد که باید بررسی کنیم: $f(b)>f(a)$ یا $f(b)<f(a)$. حالت اول را دقیقاً بررسی می‌کنیم. (حالت دوم درست شبیه آن انجام می‌شود.) پس فرض می‌کنیم $f(b)>f(a)$. نشان می‌دهیم که در این صورت f افزایشی سره است. در نخستین وهله، اگر $a<x<b$، آنگاه $f(a)<f(x)<f(b)$، زیرا، در غیر این صورت یا

(الف) $f(x)<f(a)<f(b)$ خواهد بود، که در این صورت قضیهٔ مقدار میانی نشان می‌دهد که x' $(x<x'<b)$ وجود دارد به طوری که $f(x')=f(a)$، که این هم با فرض یك به‌یك بودن f در تناقض است؛

یا

(ب) $f(x)>f(b)>f(a)$ است، در این صورت یك x''، $(a<x''<x)$ وجود دارد به‌طوری که $f(x'')=f(b)$، و این هم غلط است.

بالاخره، اگر $a_1\leqslant x_1<x_2\leqslant b$، با همان نوع استدلال، و با جایگزین کردن

x_1 به‌جای a و x_2 به‌جای x، به‌نتیجهٔ $f(x_1) < f(x_2) \leqslant f(b)$ می‌رسیم. پس در حالت $f(b) > f(a)$، f افزایشی سره است. در حالت $f(b) > f(a)$، f کاهشی سره است.

۴. (الف) $c = ۲$، $\varepsilon_0 = ۰٫۲$، $x_1 = ۳٫۲۴$، $x_2 = ۴٫۸۴$، $\delta = ۰٫۷۶$.
(ب) $c = ۴/۳$، $\varepsilon_0 = ۱/۳$، $x_1 = ۱$، $x_2 = ۳/۵$، $\delta = ۰٫۱۵$.

جواب تمرینهای اضافی

۱. (الف) ۳/۲؛ (ب) ۰؛ (پ) ۶؛ (ت) ۲؛ (ث) a_p/b_p؛ (ج) ۱/۳.
۲. (الف) ۵۰، ۵۰۰۰، ۵۰۰۰۰۰۰؛ (ب) ۳۱، ۳۰۰۱، ۳۰۰۰۰۰۱؛ (پ) ۴، ۳۳۴، ۳۳۳۳۳۴؛ (ت) ۳، ۳۲، ۱۰۰۰؛ (ث) ۱۰، ۱۹، ۳۰؛ (ج) ۲۲، ۶۶، ۱۳۲.
۳. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰؛ (ت) ۱؛ (ث) ۲.
۴. برای $k \geqslant 0$

$$(1+h)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} h^\nu > \binom{n}{k+1} h^{k+1}$$

$$\geqslant n(n-1)\dots\frac{(n-k)h^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\geqslant \frac{(n-k)^{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!}$$

نتیجتاً، برای $n \geqslant k\,(1/2)$

$$\frac{n^k}{(1+h)^n} \leqslant \frac{(k+1)!\,n^k}{(n-k)^{k+1} h^{k+1}} \leqslant \frac{2^{k+1}(k+1)!}{nh^{k+1}} = \frac{c}{n}$$

که در آن c مقداری ثابت است.
برای $k < 0$ بدیهی است.

۵. قرار می‌دهیم $1+h = (\sqrt[k]{n})^{1/n}$. ازاینجا نتیجه می‌شود که $n = (1+h)^{nk}$. با استفاده ازقضیهٔ دوجمله‌ای داریم

$$n = (1+h)^{nk} \geqslant \binom{nk}{2} h^2$$

بنابراین $h^2 \leqslant 2/k\,(nk-1)$.
۶. صورت و مخرج را در $\sqrt{n^k+1} - \sqrt{n^k}$ ضرب می‌کنیم.
۷ و ۸. در هرحالت مثل تمرین ۶ عمل کنید.

۹.
$$a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+(1/2)})$$
$$=\frac{\sqrt{n+(1/2)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+(1/2n)}}{\sqrt{1+(1/n)}+1}$$

برای هر $\alpha>0$ داریم

$$1<\sqrt{1+\alpha}<\sqrt{1+2\alpha+\alpha^2}=1+\alpha$$

لذا

$$\frac{1}{2+(1/n)}<a_n<\frac{1+(1/2n)}{2}$$

و

$$-\frac{1}{4n}<-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4+(2/n)}\right)<a_n-\frac{1}{2}<\frac{1}{4n}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $n>1/4\varepsilon$، آنگاه $|a_n-(1/2)|<\varepsilon$.

۱۰.
$$a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^{2/3}+n^{1/3}(n+1)^{1/3}+n^{2/3}}$$
$$<\frac{1}{3n^{2/3}}$$

هرگاه $n>(3\varepsilon)^{-3/2}$.

۱۱. (الف) ۰؛ (ب) خیر؛ (پ) برای $n\geqslant 10$؛ (ت) قرار دهید $k=10^{19}/19!$. برای $n>19$ داریم $a_n\leqslant k/2^{n-19}$؛ (ث) ۳۰ ($30!=2.7\times10^{32}$، $29!=8.8\times10^{30}$). از تقریب (ت) نتیجه می‌شود $n=32$.

۱۲.
$$a_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}$$

فرض کنید $m=[n/2]$. در این صورت

$$a_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$$

۱۳. (الف)
$$a_n=\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n}{n^۲}=\frac{۱+۲+\cdots+n}{n^۲}$$
$$=\frac{(۱/۲)n(n+۱)}{n^۲}$$

(ب) دیده می‌شود که بزرگترین جمله $۱/n^۲$ است. بنابراین
$$b_n=\frac{۱}{n^۲}+\frac{۱}{(n+۱)^۲}+\cdots+\frac{۱}{(۲n)^۲}<\frac{n+۱}{n^۲}$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=۰$.

(پ) دیده می‌شود که بزرگترین و کوچکترین جمله به‌ترتیب مساوی $۱/\sqrt{n^۲+۱}$ و $۱/\sqrt{n^۲+n}$ است. پس
$$\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^۲+n}}$$

اکنون تقریب به‌کار رفته درتمرین ۹ برای $\sqrt{۱+\alpha}$ را به‌کار می‌بریم.

۱۴. کسراعشاری را به‌عنوان مجموع یك تصاعد هندسی درنظر بگیرید.

۱۵. $(۱+(۱/۱۰۰))^n$ را بسط می‌دهیم، وآن را با ۱۰۲ امین جملهٔ آن مقایسه می‌کنیم
$$(۱٫۰۱)^n>\frac{n(n-۱)\cdots(n-۱۰۰)}{۱۰۱!}\times\frac{۱}{۱۰۰^{۱۰۱}}$$

نتیجتاً، برای $n\geqslant ۱۰۱$ داریم
$$\frac{n^{۱۰۰}}{۱٫۰۱^n}<\frac{۱۰۱!\,۱۰۰^{۱۰۱}}{n(۱-(۱/n))(۱-(۲/n))\cdots(۱-(۱۰۰/n))}<\frac{k}{n}$$

که درآن ثابت k مساوی است با
$$k=\frac{۱۰۱!\,۱۰۰^{۱۰۱}}{(۱-(۱/۱۰۱))(۱-(۲/۱۰۱))\cdots(۱-(۱۰۰/۱۰۱))}$$
$$=۱۰۱^{۱۰۱}\times۱۰۰^{۱۰۱}$$

حد مساوی ۰ است.

۱۶.
$$a<\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant a\sqrt[n]{۲}$$

مشابهاً، اگر a بزرگترین مقدار اعداد $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k باشد، آنگاه

$$a \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \leqslant a\sqrt[n]{k}$$

و حد مساوی a است.

۱۷. جملهٔ nام دنباله عبارت است از $۲^{۱-(۱/۲^n)}$.

۱۸. کوچکترین عدد اول ۲ است. بنابراین اگر $۲^m \leqslant n < ۲^{m+۱}$، آنگاه $v(n) \leqslant m$ و

$$\frac{v(n)}{n} \leqslant \frac{m}{۲^m}$$

۱۹. چون a_n یك دنبالهٔ همگراست، لذا کرانـدار است، یعنی یك عـدد حقیقی مثبت A وجود دارد به طوری که برای تمام nها، $|a_n| < A$. برای هرعدد مثبت ε یك عدد N وجود دارد به‌طوری‌که اگر $n > N$، آنگاه $|a_n - \xi| < \varepsilon$. نتیجتاً

$$\begin{aligned}|\sigma_n - \xi| &= (۱/n)\{|a_۱ - \xi| + |a_۲ - \xi| + \cdots + |a_n - \xi|\}\\ &\leqslant (۱/n)\{N(A + |\xi|) + |a_{N+۱} - \xi| + \cdots + |a_n - \xi|\}\\ &\leqslant (N/n)(A + |\xi|) + (\varepsilon(n-N))/n\\ &\leqslant (N/n)(A + |\xi|) + \varepsilon\\ &\leqslant ۲\varepsilon\end{aligned}$$

به‌شرطی‌که $n > N(A + |\xi|)/\varepsilon$.

۲۰. (الف)

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{۱}{۱\cdot۲} + \frac{۱}{۲\cdot۳} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)}\\ &= \left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}\right)\\ &= ۱ - \frac{۱}{n+۱} \longrightarrow ۱\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳} + \frac{۱}{۲\cdot۳\cdot۴} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}\\ &= \left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳}\right) - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right)\right] + \left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right) - \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right)\right]\\ &\quad + \cdots + \left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۲}\right) - \left(\frac{۱}{n+۱} - \frac{۱}{n+۲}\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}\right)-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n+۲}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲(n+۱)}-\frac{۳}{۲(n+۲)}\longrightarrow\frac{۱}{۴}$$

۲۱. $c_n=a_۰\sqrt{n}+a_۱\sqrt{n+۱}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}$

$$=\sqrt{n}\left\{a_۰+a_۱\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}+\cdots+a_p\sqrt{۱+\frac{p}{n}}\right\}$$

$$=\sqrt{n}\left\{a_۰-a_۰+a_۱\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}-۱\right)+\cdots+a_p\left(\sqrt{۱+\frac{p}{n}}-۱\right)\right\}$$

نتیجتاً

$$|c_n|\leqslant\sqrt{n}\,A\left\{\left|\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}-۱\right|+\cdots+\left|\sqrt{۱+\frac{p}{n}}-۱\right|\right\}$$

که در آن A بزرگترین مقدار $|a_۱|$، $|a_۲|$، ...، $|a_p|$ است. از تقریب $\sqrt{۱+\alpha}<۱+\alpha$ برای $\alpha>۰$، داریم

$$|c_n|<\sqrt{n}\,A\left(\frac{۱}{n}+\frac{۲}{n}+\cdots+\frac{p}{n}\right)$$

$$\leqslant\frac{Ap(p+۱)}{۲\sqrt{n}}$$

۲۲. قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt[۲n+۱]{n^۲+n}=۱+h$. دراین صورت داریم

$$n^۲+n=(۱+h)^{۲n+۱}>\binom{۲n+۱}{۳}h^۳$$

نتیجه از

$$\binom{۲n+۱}{۳}=\frac{(۲n+۱)(۲n)(۲n-۱)}{۶}$$

به‌دست می‌آید.

۲۳. فرض کنید $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. قرار می‌دهیم $b_n=b+\varepsilon_n$، $r=p/q$، داریم

$$a_{n+۱}=\frac{b+\varepsilon_n}{q}-\frac{p}{q}a_n$$

$$=\frac{b+\varepsilon_n}{q}-ra_n$$

$$a_{n+۲}=\frac{b+\varepsilon_{n+۱}}{q}-ra_{n+۱}$$

$$=\frac{b+\varepsilon_{n+۱}}{q}-\frac{r(b+\varepsilon_n)}{q}+r^۲a_n$$

$$=\frac{b}{q}(۱-r)+\frac{۱}{۹}(\varepsilon_{n+۱}-r\varepsilon_n)+r^۲a_n$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_{n+k}=\frac{b}{q}[۱-r+r^۲+\cdots+(-r)^{k-۱}]$$

$$\frac{۱}{۹}+[\varepsilon_{n+k-۱}-r\varepsilon_{n+k-۲}+\cdots+(-r)^{k-۱}\varepsilon_n]+(-r)^ka_n$$

توجه کنید که

$$\frac{b}{q}[۱-r+r+r^۲+\cdots+(-r)^{k-۱}]=\frac{b}{q}\cdot\frac{۱-(-r)^k}{۱+r}$$

$$=\frac{b}{p+q}[۱-(-r)^k]$$

چون برای $v>N(\varepsilon)$ داریم $|\varepsilon_v|<\varepsilon$، لذا

$$\left|a_{n+k}-\frac{b}{p+q}\right|<\left\{\frac{|b|}{p+q}+|a_n|\right\}|r|^k+\varepsilon\frac{۱-|r|^k}{۱-|r|}$$

اگر $|p|\geqslant q$، آنگاه $a_n=(-p/q)^n$ واگراست، اما

$$b_n=p\left(-\frac{q}{p}\right)^n+q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n+۱}$$

$$=\left(-\frac{p}{q}\right)^n\left[p--q\left(\frac{p}{q}\right)\right]=۰$$

۲۴. (الف) کراندار؛ (ب) همگرا؛ (پ) همگرا؛ (ت) یکنوا، وهمگرا؛ (ث) کراندار؛

(ج) یکنوا، وهمگرا؛ (چ) یکنوا؛ (ح) کراندار، $-1/3 < S_n < 1$؛ (خ) توجه کنید که به‌ازای $n = 2^\nu$ داریم

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1} + \frac{1}{2^{\nu-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{\nu+1}{2}$$

بنابراین S_n یکنوا و بیکران است.

(د) S_n یکنوای افزایشی، و در مقایسه با

$$T_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n}$$

به‌نظر می‌رسد که کراندار است.

۲۵. (الف) $a_{n+1} - a_n = 4n - 1 > 0, \qquad n \geqslant 1$

(ب) $a_{n+1} - a_n = 6n + 1$

(پ) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$

(ت) $a_n = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} \leqslant \sqrt{1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}} = a_{n+1}$

(ث) $a_{n+1} - a_n = 1 + \dfrac{1}{n(n+1)}$

۲۶. (الف) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1/n(n+1)} < 1$

(ب) $a_n - a_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{2n} - \sin\dfrac{\pi}{2n+2}$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n+2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n+2}\right)$$

$$\geqslant 0$$

چون برای $n\geqslant 1$، $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}\right)<\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)<\frac{\pi}{2}$

(پ) $$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

۲۷. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۱/۲؛ (ت) ∞؛ (ث) ۱.

۲۸. کسر اعشاری بی‌پایان

$$x=c_0{,}c_1c_2c_3\cdots$$

حد دنبالهٔ

$$c_0,\ c_0+\frac{c_1}{10},\ c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2},\ \cdots$$

است، لذا افزایشی است، زیرا برای $k\geqslant 0$، $c_k\geqslant 0$. از طرف دیگر چون برای $k>0$، $c_k\leqslant 9$، لذا

$$\begin{aligned}c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\cdots+\frac{c_n}{10^n}&\\ &\leqslant c_0+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}\\ &<c_0+1\end{aligned}$$

۲۹. (الف) قرار می‌دهیم $e_n=a_n-\sqrt{2}$. دراین صورت

$$e_{n+1}=a_{n+1}-\sqrt{2}=e_n\left(1-\frac{a_n+\sqrt{2}}{2a_n}\right)=\frac{e_n^2}{2a_n}$$

می‌توانیم فرض کنیم e_n غیرمنفی است، زیرا اگر $e_n\geqslant 0$؛ آنگاه $e_{n+1}\geqslant 0$، واگر $a_0>0$، آنگاه e_1 و تمام جملات بعدی مثبت هستند. چون $a_n>e_n$، داریم

$$e_{n+1}<\frac{e_n}{2}<\frac{e_{n-1}}{4}<\cdots<\frac{e_1}{2^n}=\frac{e_0^2}{2^{n+1}a_0}$$

بنابراین برای هرانتخاب $a_0>0$ دنبالهٔ a_n همگرا به $\sqrt{2}$ است.

(ب) مشابه قسمت (الف) انجام می‌گیرد.

۳۰. از نامساوی بین میانگین حسابی وهندسی(میانگین هندسی ازمیانگین حسابی کوچکتر است)، داریم $a_n\leqslant b_n$. نتیجتاً

$$a_{n+۱}=\sqrt{a_n b_n}\geqslant a_n, \qquad b_{n+۱}=\frac{a_n+b_n}{۲}\leqslant b_n$$

و دنباله‌های a_n و b_n به‌ترتیب افزایشی کراندار و کاهشی کراندار هستند. به‌علاوه

$$b_{n+۱}-a_{n+۱}=\frac{a_n+b_n}{۲}-\sqrt{a_n b_n}$$

$$=\frac{b_n-a_n}{۲}-\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}+a_n$$

$$=\frac{b_n-a_n}{۲}-\sqrt{a_n}(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n})$$

$$\leqslant\frac{b_n-a_n}{۲}$$

نتیجه می‌شود که

$$b_{n+۱}-a_{n+۱}\leqslant\frac{b_۱-a_۱}{۲^n}$$

و بنابراین a_n و b_n دارای حد مساوی هستند.

۳۱. داریم $a_{n+۱}=\sqrt{۲+a_n}$. به علاوه، اگر $a_n<۲$ آنگاه $a_{n+۱}<۲$ و دنباله کراندار است. لذا دنباله یکنوای افزایشی است. بالاخره اگر $\varepsilon_n=۲-a_n$، آنگاه

$$a_{n+۱}=\sqrt{۴-\varepsilon_n}$$
$$\varepsilon_n\leqslant ۲-a_۱<۲-\sqrt{۲}<۱$$

نتیجه می‌شود

$$\varepsilon_{n+۱}=۲\left(۱-\sqrt{۱-\frac{\varepsilon_n}{۴}}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_n}{۲(۱+\sqrt{۱-(\varepsilon_n/۴)})}\leqslant\frac{\varepsilon_n}{۲}$$

نتیجتاً $\varepsilon_{n+۱}<\varepsilon_۱/۲^n$.

۳۲.

$$a_{n+۱}-a_n=\frac{۱}{۲n+۲}+\frac{۱}{۲n+۱}-\frac{۱}{n}$$

$$<\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲n}-\frac{۱}{n}=۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که دنباله یکنوای کاهشی است. به علاوه، $a_n \leqslant (n+۱)/n = ۱+(۱/n)$، و

$$a_n = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$$

$$\geqslant \frac{۱}{۲n} + \cdots + \frac{۱}{۲n} = \frac{n+۱}{۲n} > \frac{۱}{۲}$$

۳۳. $b_n = a_n - (۱/n)$؛ نتیجتاً، b_n دارای همان حد a_n است. به‌علاوه

$$b_{n+۱} - b_n = \frac{۱}{۲n+۲} + \frac{۱}{۲n+۱} - \frac{۱}{n+۱}$$

$$> \frac{۱}{۲(n+۱)} + \frac{۱}{۲(n+۱)} - \frac{۱}{n+۱} = ۰$$

بنابراین، b_n یکنوای افزایشی است.

۳۴. از نامساوی موجود بین میانگین حسابی و هندسی، داریم

$$\frac{۲a_nb_n}{a_n+b_n} = \left(\frac{۲\sqrt{a_nb_n}}{a_n+b_n}\right)\sqrt{a_nb_n} \leqslant \sqrt{a_nb_n}$$

یا

$$a_{n+۱} \leqslant b_{n+۱}$$

به‌علاوه

$$a_{n+۱} = \frac{۲}{a_n^{-۱}+b_n^{-۱}} \geqslant \frac{۲}{۲a_n^{-۱}} = a_n$$

و مشابهاً، $b_n \leqslant b_{n+۱}$. بنابراین a_n افزایشی کراندار و b_n کاهشی کراندار است. بالاخره

$$b_{n+۱} - a_{n+۱} = \sqrt{a_nb_n} - \frac{۲a_nb_n}{a_n+b_n}$$

$$= \frac{۲\sqrt{a_nb_n}}{a_n+b_n}\left(\frac{a_n+b_n}{۲} - \sqrt{a_nb_n}\right)$$

$$\leqslant \frac{۲\sqrt{a_nb_n}}{a_n+b_n} \cdot \frac{b_n-a_n}{۲}$$

$$\leqslant \frac{b_n-a_n}{۲}$$

در دو مرحلهٔ اخیر از نامساویهای تمرین ۳۰ و نامساوی بین میانگین حسابی وهندسی استفاده کرده‌ایم.

۳۵. (الف)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$\geqslant\left[1-\frac{n}{(n+1)^2}\right]\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\geqslant\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3}>1$$

(از نامساوی $(1+h)^n\geqslant 1+nh$ برای $h>-1$ کـه به‌سادگی با استقرا ثابت می‌شود استفاده شده است.) متشابهاً

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\geqslant\left[1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right]\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\geqslant\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

(ب) برای $n\geqslant 2$، $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{e}{n+1}<1$.

۳۶. اگر $L\neq 0$، $\varepsilon>0$ را چنان انتخاب می کنیم که $\varepsilon<L$. درایـن صورت برای $n\geqslant N(\varepsilon)$ داریم

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<\varepsilon$$

لذا

$$(L-\varepsilon)a_n<a_{n+1}<(L+\varepsilon)a_n$$

و نتیجتاً

$$(L-\varepsilon)^{n-N}a_N<a_n<(L+\varepsilon)^{n-N}a_N$$

نتیجه می‌شود

$$(L-\varepsilon)\left[\sqrt[n]{\frac{a_N}{(L-\varepsilon)^N}}\right]<\sqrt[n]{a_n}<(L+\varepsilon)\left[\sqrt[n]{\frac{a_N}{(L+\varepsilon)^N}}\right]$$

چون مقادیر زیر رادیکال درسمت چپ وسمت راست ثابتند، رادیکالها به‌سمت ۱ میل می‌کنند و نتیجه حاصل می‌شود.

اگر $L=۰$، نامساوی قبلی تبدیل به‌نامساوی زیرمی‌شود

$$۰<\sqrt[n]{a_n}<(\varepsilon^{۱-n/N})\sqrt[n]{a_N}$$

۳۷. (پ)
$$\frac{(n+۱)!}{(n+۱)^{n+۱}}\Big/\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n=\frac{۱}{(۱+(۱/n))^n}\longrightarrow\frac{۱}{e}$$

۳۸. (الف)
$$S_n=\sum_{۱}^{n}\frac{۱}{k(k+۲)}=\frac{۱}{۲}\sum_{۱}^{n}\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۲}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۲}\right)$$

(ب) از تساوی بالا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}S_n=۳/۴$$

دنبالهٔ $T_n=\sum_{۱}^{n}\frac{۱}{k^۲}$ یکنوای افزایشی است. به‌علاوه، برای $k\geqslant ۱$ داریم

$$k^۲\geqslant\frac{k(k+۲)}{۳}$$

لذا

$$T_n\leqslant ۳S_n\leqslant ۹/۴$$

(چون S_n یکنوای افزایشی است.) چون T_n افزایشی وکراندار است، نتیجه می‌شود که T_n همگراست.

۳۹. (الف) فرض کنید

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{(k+p)(k+p+q)}$$

از تساوی

$$\frac{۱}{k+p}=\frac{۱}{q}\left(\frac{۱}{k+p}-\frac{۱}{k+p+q}\right)$$

داریم

$$S_n=\frac{۱}{q}\left(\frac{۱}{p+۱}+\frac{۱}{p+۲}+\cdots+\frac{۱}{p+q}-\frac{۱}{n+p+۱}-\frac{۱}{n+p+۲}\right.$$
$$\left.-\cdots-\frac{۱}{n+p+q}\right)$$

(ب)
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{۱}{q}\left(\frac{۱}{p+۱}+\frac{۱}{p+۲}+\cdots+\frac{۱}{p+q}\right)$$

۴۰. (الف) مثل قسمت (الف) تمرین ۲۵.

(ب)
$$\frac{۱}{k(k+۱)(k+۳)}=\frac{۱}{k(k+۳)}-\frac{۱}{(k+۱)(k+۳)}$$

نتیجتاً، طبق تمرین ۳۹ (الف)

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k(k+۱)(k+۳)}=\frac{۱}{۳}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۲}-\frac{۱}{n+۳}\right)$$
$$-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n+۲}-\frac{۱}{n+۳}\right)$$

(پ) حد در قسمت (الف) مساوی ۱/۴ و در قسمت (ب) مساوی ۷/۳۶ است.

(ت) طی مراحل متوالی بـه مجموعهایی از نوع تمرین ۳۹ (الف) تبدیل می‌کنیم. اولین آنها عبارت است از

$$\frac{۱}{(k+a_۱)(k+a_۲)\cdots(k+a_m)}$$
$$=\frac{۱}{a_۲-a_۱}\left(\frac{۱}{k+a_۱}-\frac{۱}{k+a_۲}\right)\frac{۱}{(k+a_۳)\cdots(k+a_m)}$$
$$=\frac{۱}{a_۲-a_۱}\left[\frac{۱}{(k+a_۱)(k+a_۲)}-\frac{۱}{(k+a_۲)(k+a_۳)}\right]\frac{۱}{(k+a_۴)\cdots(k+a_m)}$$

۴۱. چون a_n یکنواست، مشاهده می‌کنیم که جملات دنباله برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ دارای علامت ثابتی هستند. فرض کنید، به عنوان مثال، برای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ $a_n \geqslant a_{n+۱} \geqslant ۰$. در این صورت طبق آزمون کشی[۱]

برای m به‌اندازهٔ کافی بزرگ $\quad a_{m+۱}+a_{m+۲}+\cdots+a_{m+k}<\varepsilon$

---

۱. دنبالهٔ u_n همگراست اگر برای هر $\varepsilon>۰$ یك عدد طبیعی $N=N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر n و m بزرگتر از N داشته باشیم $|u_n-u_m|<\varepsilon$.

مستقل از k. از

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}\geqslant ka_{m+k}$$

داریم $ka_{m+k}<\varepsilon$. مشابهاً، برای k به اندازهٔ کافی بزرگ داریم

$$ma_{m+k}<\varepsilon$$

از جمع ایـن دو نامساوی نتیجه می‌شود کـه برای m و k به‌اندازهٔ کافی بزرگ $(m+k)a_{m+k}$ به‌دلخواه کوچك است.

۴۲. با استفاده از استقرا

$$\sum_{n=1}^{k-1} nb_n=a_1-ka_k+(k-1)a_{k+1}$$
$$=a_1-a_{k+1}-k(a_k-a_{k+1})$$

اکنون از تمرین ۴۱ استفاده می‌کنیم. چون $b_k\geqslant 0$، داریم

$$a_k-a_{k+1}\geqslant a_{k+1}-a_{k+2}$$

نتیجه می‌شود که

$$a_k-a_{k+m}=\sum_{j=1}^{m}(a_{k-1+j}-a_{k+j})$$
$$\geqslant m(a_{k+m-1}-a_{k+m})$$

این نتیجه را در تساوی زیر وارد می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{k+m-2} nb_n=a_1-a_{k+m}-(k+m-1)(a_{k+m-1}-a_{k+m})$$

به‌دست می‌آوریم

$$\left|\sum_{n=1}^{k+m-2} nb_n-a_1\right|\leqslant a_{k+m}+\frac{k+m-1}{m}(a_k-a_{k+m})$$
$$\leqslant a_k+2\,\frac{k+m-1}{m}\,a_k$$
$$\leqslant 2a_k\left(\frac{k+3m-1}{m}\right)$$

بـرای هـر ν دو عـدد k و m را چنان انتخاب می‌کنیم که $m+k-2=\nu$ و $(\nu/2)+1\leqslant m\leqslant(\nu/2)+2$. در ایـن صـورت $\nu/2<k\leqslant(\nu/2)+1$.

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{n=1}^{k+m-2}\right| nb_n - a_1 | \leqslant 8a_k$$

از این نامساوی نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

۴۳. (ت) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5+\sqrt[3]{2x^5}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(5+\sqrt[3]{2x^5})}$ (حد توابع پیوسته)

$$=\sqrt{5+\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x^5}}$$ (حد مجموع)

$$=\sqrt{5+\sqrt[3]{\lim_{x\to 2} 2x^5}}$$ (حد توابع پیوسته)

$$=\sqrt{5+\sqrt[3]{2^6}}$$ (حد حاصلضرب)

$$=3$$

۴۴. (الف) $\dfrac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1$

(ب) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin(\pi-z)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$

(پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$

۴۵. حدهای (الف) و (ب) وجود ندارند؛ حد (پ) وجود داشته و مساوی ۱ است.

۴۶. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin 1/x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

چون $\lim\limits_{x\to 0} x/\sin x=1$، $|x|<\varepsilon$، لذا

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

۴۷. (الف)
$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2} = \lim_{x \to \alpha} \frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha} \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{x+\alpha}$$

(ب)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+\cos x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+(\cos x)/x}{1+(1/x)}$$

(پ)
$$\lim_{x \to \infty} \cos\frac{1}{x} = \cos\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right)$$

۴۸. (الف) ۱/۶۰، ۱/۶۰۰، ۱/۶۰۰۰.

(ب) $(1/10)(1+2|\xi-1|)^{-1}$، و غیره.

(پ) $(1/120)(1+|\xi|)^{-3}$، وغیره.

(ت) ۱/۱۰۰، ۱/۱۰۰۰۰، ۱/۱۰۰۰۰۰۰.

(ث) ۱/۱۰، ۱/۱۰۰، ۱/۱۰۰۰.

۴۹. (الف) ۱/۶۰۰، $\varepsilon/6$؛ (ب) ۱/۴۰۰، $\varepsilon/4$؛ (پ) ۱/۷۷۶۰۰، $\varepsilon/776$؛
(ت) ۱/۱۰۰۰۰، ε^2؛ (ث) ۱/۱۰۰، ε.

۵۰. (الف)، (ب)، (پ)، (ت)، (چ) پیوسته‌اند؛ و یا دارای ناپیوستگی رفع شدنی[1] هستند.

(ث) درنقاط $x=2$ و $x=4$ ناپیوسته است.

(ج) درنقطهٔ $x=3$ ناپیوسته است.

(ح)، (ذ)، (ز) درنقاط $x=(n+(1/2))\pi$ ناپیوسته است.

(خ)، (د) درنقاط $x=n\pi$ ناپیوسته است.

(ر) درنقاط $x=n\pi$ ناپیوسته است. درنقطهٔ $x=0$ ناپیوستگی رفع شدنی است.

(ژ) درنقطهٔ $x=0$ ناپیوسته است.

۵۱. (الف) ۱/۱۱، (ب) ۱/۱۰۰۱، (پ) $\varepsilon/(1+\varepsilon)$.

۵۲. (الف) $4\varepsilon/(1+2\varepsilon)$، (ب) $\varepsilon/7$، (پ) $\arccos(1-\varepsilon)$.

۵۳. (الف)
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

(ب)
$$\sqrt{x+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x+(1/2)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+(1/2x)}}{\sqrt{1+(1/x)}+1}$$

۵۴. (الف)
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| = \frac{|3-x|}{3|x|}$$

---

۱. اگرتابع در یك نقطه دارای حد باشد ولی درآن نقطه تعریف نشده و یا اگرتعریف شده مقدارتابع باحدش مساوی نباشد،می‌گوییم تابع درآن‌نقطه دارای‌ناپیوستگی رفع‌شدنی است.

اگر فرض کنیم $۲ > |x-۳| > ۰$، یا $۲ > x-۳ > -۲$ یا $۵ > x > ۱$، آنگاه

$$\frac{|۳-x|}{۳|x|} < \frac{|۳-x|}{۳}$$

اگر $\varepsilon > ۳/|x-۳|$ یعنی $۳\varepsilon > |x-۳|$ باشد، آنگاه $\varepsilon > |(۱/۳)-(۱/x)|$.
بنابراین کافی است قرار دهیم $\delta = \min\{۲, ۳\varepsilon\}$. دراین صورت

$$|x-۳| < \delta \implies \left|\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}\right| < \varepsilon$$

(ب) نخست فرض کنید $|c|(۱/۲) > |x-c|$. دراین صورت

$$||x|-|c|| \leqslant |x-c| < \frac{۱}{۲}|c| \implies \frac{۱}{۲}|c| < |x| < \frac{۳}{۲}|c|$$

$$\implies \frac{۱}{۲}|c|^۲ < |cx| < \frac{۳}{۲}|c|^۲ \implies \frac{۱}{۲}c^۲ < |cx| < \frac{۳}{۲}c^۲$$

$$\left|\frac{۱}{x}-\frac{۱}{c}\right| = \left|\frac{x-c}{cx}\right| = \frac{|x-c|}{|cx|} < \frac{|x-c|}{(۱/۲)c^۲} = \frac{۲}{c^۲}|x-c|$$

اگر $\varepsilon > |x-c|(۲/c^۲)$، آنگاه $(c^۲\varepsilon/۲) > |x-c|$. بنابراین، اگر قرار دهیم $\delta = \min\{(۱/۲)|c|, \; c^۲\varepsilon/۲\}$ آنگاه

$$|x-c| < \delta \implies \left|\frac{۱}{x}-\frac{۱}{c}\right| < \varepsilon$$

۵۵. (الف) باید نشان دهیم که به‌ازای هر $۰ < \varepsilon$ یك $۰ < \delta$ وجود دارد به‌طوری که اگر $\delta > |x|$، آنگاه $\varepsilon > |x^۲-۲x+۱-۱|$.

$$|x^۲-۲x+۱-۱| = |x(x-۲)| = |x|\,|x-۲| \leqslant |x|(|x|+۲) < ۳|x|$$

زیرا وقتی $x \to ۰$ می‌توانیم فرض کنیم $۱ > |x|$. بنابراین اگر $\varepsilon > ۳|x|$، یعنی $\varepsilon/۳ > |x|$ باشد، آنگاه $\varepsilon > |x^۲-۲x+۱-۱|$ خواهد بود. بنابراین کافی است δ را مساوی $\min\{\varepsilon/۳, ۱\}$ بگیریم.
(ب) باید نشان دهیم که به‌ازای هر $۰ < \varepsilon$ یك $۰ < \delta$ وجود دارد به‌طوری که اگر $\delta > |x-۳| > ۰$، آنگاه

$$\left|\frac{x^۳-۲۷}{x-۳}-۲۷\right| < \varepsilon$$

چون $x-۳\neq ۰$، پس

$$\frac{x^۳-۲۷}{x-۳}=\frac{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{x-۳}=x^۲+۳x+۹$$

$$\left|\frac{x^۳-۲۷}{x-۳}-۲۷\right|=|x^۲+۳x-۱۸|=|(x-۳)(x+۶)|$$
$$=|x-۳|\,|x+۶|$$

چون $x\to ۳$، لذا می‌توان فرض کرد $|x-۳|<۱$. دراین صورت

$$|x-۳|<۱ \Rightarrow -۱<x-۳<۱ \Rightarrow ۲<x<۴$$
$$\Rightarrow ۸<x+۶<۱۰$$

بنابراین $|x-۳|\,|x+۶|<۱۰|x-۳|$. اگر $۱۰|x-۳|<\varepsilon$، یعنی $|x-۳|<\varepsilon/۱۰$ باشد، آنگاه $|(x^۳-۲۷)/(x-۳)-۲۷|<\varepsilon$. بنابراین کافی است قرار دهیم $\delta=\min\{\varepsilon/۱۰,\ ۱\}$.

۵۶. $$\left|\frac{t^۲+t}{t^۲-۱}-۱\right|=\left|\frac{t^۲+t-t^۲+۱}{t^۲-۱}\right|=\frac{|t+۱|}{|t^۲-۱|}=\frac{|t+۱|}{|t+۱|\,|t-۱|}$$

$$=\frac{۱}{|t-۱|}<\varepsilon \Rightarrow |t-۱|>\frac{۱}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow t-۱<-\frac{۱}{\varepsilon} \text{ یا } t-۱>\frac{۱}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow t<۱-\frac{۱}{\varepsilon} \text{ یا } t>۱+\frac{۱}{\varepsilon}$$

فرض کنید $M=۱+(۱/\varepsilon)$. در این صورت اگر $t>M=۱+(۱/\varepsilon)$، آنگاه

$$\left|\frac{t^۲+t}{t^۲-۱}-۱\right|<\varepsilon$$

۵۷. $$\sqrt{t^۲-۱}<\varepsilon \Rightarrow t^۲-۱<\varepsilon^۲ \Rightarrow (t-۱)(t+۱)<\varepsilon^۲$$

نخست فرض کنید $\delta=۱$، یعنی $(t-۱)<۱$. دراین صورت

$$t-۱<۱ \Rightarrow t<۲ \Rightarrow t+۱<۳$$

بنابراین $(t-۱)(t+۱)<۳(t-۱)$. اگر $۳(t-۱)<\varepsilon^۲$ یا $(t-۱)<\varepsilon^۲/۳$

آنگاه $\varepsilon^{۲} > (۱ - t^{۲})$ و درنتیجه $\varepsilon > \sqrt{۱ - t^{۲}}$ خواهد بود. بنابراین کافی است قرار دهیم $\delta = \min\{۱, \varepsilon^{۲}/۳\}$.

۵۸. باید نشان دهیم که به‌ازای هر عدد $\varepsilon > ۰$ یك عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری که اگر $۰ < |x - ۱| < \delta$، آنگاه

$$\left|\frac{۲x^{۴} - ۶x^{۳} + x^{۲} + ۳}{x - ۱} - (-۸)\right| < \varepsilon$$

چون $x \neq ۱$، می‌توان نوشت

$$\frac{۲x^{۴} - ۶x^{۳} + x^{۲} + ۳}{x - ۱} = \frac{(۲x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x - ۳)(x - ۱)}{x - ۱}$$

$$= ۲x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x - ۳$$

بنابراین باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ یك عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری که اگر $۰ < |x - ۱| < \delta$، آنگاه $|۲x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۵| < \varepsilon$. اگر δ را کوچکتر یا مساوی ۱ بگیریم، $\delta \leqslant ۱$، آنگاه داریم $۰ < x < ۲$، دراین صورت

$$|۲x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۵| = |x - ۱|\,|۲x^{۲} - ۲x - ۵| < \delta|۲x^{۲} - ۲x - ۵|$$

$$< \delta(|۲x^{۲}| + |۲x| + ۵)$$

$$< \delta(۸ + ۴ + ۵) = ۱۷\delta$$

اگر $۱۷\delta < \varepsilon$، یعنی $\delta < \varepsilon/۱۷$ باشد نتیجهٔ موردنظر برقرار است، چون با فرض $\delta \leqslant ۱$ به $\delta < \varepsilon/۱۷$ رسیدیم، برای اینکه هر دو نامساوی برقرار باشد δ را از مینیمم ۱ و $\varepsilon/۱۷$ کوچکتر انتخاب می‌کنیم

$$\delta \leqslant \min\{۱, \varepsilon/۱۷\}$$

۵۹. وقتی $x \to ۰+$ حدس می‌زنیم که $۱/x$ به‌طور بی‌پایان افزایش می‌یابد، $e^{۱/x}$ نیز همچنین، و $e^{-۱/x}$ به سمت صفر می‌گراید، و در نتیجه $۱ + e^{-۱/x}$ به ۱ میل می‌کند؛ بنابراین حد مورد نظرمساوی ۲ است.

برای اثبات این حدس، باید نشان دهیم که

$$\forall \varepsilon > ۰,\ \exists \delta > ۰ : ۰ < x < \delta \implies \left|\frac{۲}{۱ + e^{-۱/x}} - ۲\right| < \varepsilon$$

داریم

$$\left|\frac{۲}{۱+e^{-۱/x}}-۲\right|=\left|\frac{۲-۲-۲e^{-۱/x}}{۱+e^{-۱/x}}\right|=\frac{۲}{e^{۱/x}+۱}<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow\frac{e^{۱/x}+۱}{۲}>\frac{۱}{\varepsilon}\Longrightarrow e^{۱/x}>\frac{۲}{\varepsilon}-۱\Longrightarrow\frac{۱}{x}>\ln\left(\frac{۲}{\varepsilon}-۱\right)$$

$$\Longrightarrow x<\frac{۱}{\ln((۲/\varepsilon)-۱)}$$

به‌شرطی‌که $۰<۱-(۲/\varepsilon)$، یعنی $۰<\varepsilon<۲$، باشد.

بنا براین، برای $۰<\varepsilon<۲$ کافی است‌قرار دهیم $\delta=۱/\ln((\varepsilon/۲)-۱)$.
اگر $\varepsilon\geqslant۲$، δ می‌تواند هـر مقدار مثبتی باشد، زیرا در این حالت به‌ازای هرمقدار مثبت x داریم $۲/(e^{۱/x}+۱)<\varepsilon$.

۶۰. (الف) اگـر x یك عـدد صحیح باشد، آنگاه $y=(\cos\pi x)^۲=۱$، و در نتیجه $y^m\to۱$. اگر x یك عدد صحیح نباشد، آنگاه $۰\leqslant y<۱$ و در نتیجه $y^m\to۰$.
(ب) اگر x یك عدد گویا باشد، آنگاه اعدادصحیح p و q وجود دارند به‌طوری‌که $x=p/q$. دراین صورت برای $n\geqslant q$ داریم $z_n=(\cos n!\,\pi x)^۲=۱$ و درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=۱$، که در آن $\omega_n=\lim\limits_{m\to\infty}z_n^m$، اگر x گنگ باشد، آنگاه $n!\,x$ هم گنگ است و طبـق قسمت (الف) بـرای n ثـابت داریـم $\omega_n=\lim\limits_{m\to\infty}z_n^m=۰$، لذا $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=۰$. (پ) تابع قسمت (الف) پیوسته است به‌جز برای مقادیر صحیح x.
تابع قسمت (ب) هیچ جا پیوسته نیست.

۶۱. فرض‌کنید $f(x)$ یك مقدار $y\neq۱/۲$ را می‌پذیرد. چـون f پیوسته است، $f(x)$ تمام مقادیر بین $۱/۲$ و y را می‌پذیرد. ولی می‌دانیم‌که بین دوعددگویا اعدادگنگ هم وجود دارند، واین با گویا بودن مقادیر $f(x)$ مغایرت دارد.

۶۲.
$$\begin{aligned}f(n)&=f(n-۱)+f(۱)\\&=f(n-۲)+۲f(۱)\\&=\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\&=nf(۱)\end{aligned}$$

به‌علاوه، چون $f(۰)=f(۰)+f(۰)$ داریم $f(۰)=۰$، لذا

$$f(۰)=f(n)+f(-n)$$

از اینجا نتیجه می‌شودکه

$$f(-n)=-f(n)=-nf(۱)$$

بالاخره، برای هرعدد گویای $r=p/q$ داریم

$$qf\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right)=f(p)=pf(۱)$$

پس

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(۱)$$

بنابراین، f یك تابع خطی روی اعداد گویا است و

$$\forall r\in Q,\ \ f(r)=ar$$

که درآن $a=f(۱)$.

اگر f پیوسته باشد، آنگاه بهازای هرعدد حقیقی x داریم $f(x)=ax$، زیرا تفاضل $|f(x)-ax|$ می‌تواند به دلخواه کوچك باشد به شرطی‌که r به‌اندازهٔ کافی به x نزدیك باشد، و این امر امکانپذیراست زیرا برای هر عدد گنگ x، عددگویای r وجود دارد به‌طوری‌که به‌اندازهٔ دلخواه به x نزدیك باشد.

۶۳. (الف)

$$|x^n-x_۰^n|=|x-x_۰|\,|x^{n-۱}+x_۰x^{n-۲}+\cdots+x_۰^{n-۱}|$$
$$\leqslant\delta|x^{n-۱}+x_۰x^{n-۲}+\cdots+x_۰^{n-۱}|$$

δ را کوچکتراز ۱ انتخاب می‌کنیم، دراین صورت $|x|<|x_۰|+۱$؛ پس

$$|x^n-x_۰^n|\leqslant\delta\{(|x_۰|+۱)^{n-۱}+|x_۰|(|x_۰|+۱)^{n-۲}+\cdots\}$$
$$<\delta\{(|x_۰|+۱)^{n-۱}+(|x_۰|+۱)^{n-۱}+\cdots\}$$

یا

$$|x^n-x_۰^n|<\delta n(|x_۰|+۱)^{n-۱}$$

بنابراین کافی است δ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$\delta=\frac{\varepsilon}{n(|x_۰|+۱)^{n-۱}}$$

که درآن $\varepsilon<۱$.

(ب)

$$|f(x)-f(x_۰)|=|a_n(x^n-x_۰^n)+a_{n-۱}(x^{n-۱}-x_۰^{n-۱})+\cdots|$$
$$\leqslant|a_n|\,|x^n-x_۰^n|+|a_{n-۱}|\,|x^{n-۱}-x_۰^{n-۱}|+\cdots$$
$$+|a_۱|\,|x-x_۰|$$

ازقسمت قبل نتیجه می‌شود که

$$|f(x)-f(x_\circ)| < A\delta\{n(|x_\circ|+۱)^{n-۱}+(n-۱)(|x_\circ|+۱)^{n-۲}+\cdots\}$$

که در آن A بزرگترین مقدار $|a_k|$، $k=۱, ۲, \ldots, n$ است. نتیجتاً

$$|f(x)-f(x_\circ)| < A\delta\{n(|x_\circ|+۱)^{n-۱}+n(|x_\circ|+۱)^{n-۱}+\cdots\}$$

کافی است δ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$\delta < \frac{\varepsilon}{An^۲(|x_\circ|+۱)^{n-۱}}$$

یا $۱ > \delta$، هرکدام که کوچکتر است.

۶۴. گام اول. طبق قضیهٔ دو جمله‌ای داریم

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = ۱+n\cdot\frac{۱}{n}+\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}\cdot\frac{۱}{n^۳}$$

$$+\cdots+\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-n+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times n}\cdot\frac{۱}{n^n}$$

$$=۱+۱+\frac{۱}{۱\times۲}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times n}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right)$$

عبارت سمت راست مجموع $n+۱$ جملهٔ مثبت است.

n را به $n+۱$ تبدیل می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} = ۱+۱+\frac{۱}{۱\times۲}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)+\cdots$$

$$+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times(n+۱)}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱-\frac{۲}{n+۱}\right)\cdots\left(۱-\frac{n}{n+۱}\right)$$

عبارت سمت راست مجموع $n+۲$ جملهٔ مثبت است. همچنین

$$۱-\frac{۱}{n} < ۱-\frac{۱}{n+۱},\quad ۱-\frac{۲}{n} < ۱-\frac{۲}{n+۱},\quad ۱-\frac{۳}{n} < ۱-\frac{۳}{n+۱},\quad \ldots$$

بنابراین هر جمله در بسط $(۱+۱/(n+۱))^{n+۱}$ بزرگتر از جملهٔ متناظر آن در بسط $(۱+(۱/n))^n$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هرعدد طبیعی n داریم

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} > \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

یعنی دنبالهٔ $(1+(1/n))^n$ یکنوای افزایشی است.
گام ۲. داریم

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&=1+1+\frac{1}{1\times 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\times 2\times 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (1)\\
&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\\
&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\cdots+\frac{1}{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2} \quad (\text{عامل } (n-1))\\
&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\\
&=1+\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,\ \forall n\in\mathbf{N} \quad (2)
\end{aligned}$$

بنابراین دنبالهٔ $(1+(1/n))^n$ از بالا کراندار است. لذا طبق قضیهٔ ۵ دارای یك حد باپایان است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3, \qquad \forall n\in\mathbf{N}$$

بنابراین

$$2<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

مقدار حد این دنباله را با e نمایش می‌دهند. پس $2<e<3$.

۶۵. فرض کنید $x=p/q$، p و q دو عدد صحیح. در تمرین قبل نشان دادیم که $e=\lim_{n\to\infty}(1+(1/n))^n$، اگر n را مقید سازیم که روی مضارب صحیح q، mq، $m=1, 2, \ldots$ تغییر کند، آنگاه

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{mq}\right)^{mq}$$

اکنون

$$e^x = e^{p/q} = \lim_{m \to \infty} \left(۱+\frac{۱}{mq}\right)^{mpq/p}$$
$$= \lim_{m \to \infty} \left(۱+\frac{۱}{mq}\right)^{mp}$$

فرض کنید $r = mp$. دراین صورت وقتی $m \to \infty$ داریم $r \to \infty$، و $m = r/p$.
بنابراین

$$e^x = \lim_{r \to \infty} \left(۱+\frac{p}{rq}\right)^r = \lim_{r \to \infty} \left(۱+\frac{x}{r}\right)^r$$

۶۶. برای $k < ۱$

$$\left(۱+\frac{۱}{n^k}\right)^n \geqslant ۱+\frac{n}{n^k} \longrightarrow \infty$$

برای $k > ۱$

$$۱ < \left(۱+\frac{۱}{n^k}\right)^n$$
$$\leqslant ۱+\frac{n}{n^k}+\frac{۱}{۲!}\frac{n}{n^k}\frac{n-۱}{n^k}+\cdots$$
$$+\frac{۱}{\nu!}\frac{n}{n^k}\frac{n-۱}{n^k}\cdots\frac{n-\nu+۱}{n^k}+\cdots$$
$$+\frac{۱}{n!}\frac{n}{n^k}\frac{n-۱}{n^k}\cdots\frac{۱}{n^k}$$
$$\leqslant ۱+\frac{n}{n^k}\left(۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{n!}\right)$$
$$\leqslant ۱+\frac{n}{n^k}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}\right)$$
$$\leqslant ۱+۲\frac{n}{n^k}$$

چون $n/n^k \to ۰$، نتیجهٔ مورد نظر حاصل می‌شود.

۶۷. فرض کنید x یک‌عدد حقیقی مثبت دلخواه است،دراین‌صورت یک‌عدد صحیح مثبت n

وجود دارد به طوری که

$$n \leqslant x < n+۱$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{n} \geqslant \frac{۱}{x} > \frac{۱}{n+۱}$$

$$۱+\frac{۱}{n} \geqslant ۱+\frac{۱}{x} > ۱+\frac{۱}{n+۱}$$

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} \geqslant \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x} > \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n}$$

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} \geqslant \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x} \geqslant \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} \div \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)$$

فرض کنید $x \to \infty$، دراین صورت n و $n+۱$ هم در داخل مجموعهٔ اعداد طبیعی به‌سمت $+\infty$ میل می‌کنند. می‌دانیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right) = ۱ = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} = e = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x} = e$$

۶۸. فرض کنید $x=-y$. دراین صورت $y \to +\infty$ وقتی $x \to -\infty$. داریم

$$\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x} = \left(۱-\frac{۱}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-۱}\right)^{y}$$

$$= \left(۱-\frac{۱}{y-۱}\right)^{y} = \left(۱-\frac{۱}{y-۱}\right)^{y-۱}\left(۱+\frac{۱}{y-۱}\right)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(۱+\frac{۱}{y-۱}\right)^{y-۱}\left(۱+\frac{۱}{y-۱}\right)\right]$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{y-۱}\right)^{y-۱} \lim_{y\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{y-۱}\right)$$

$$= e \cdot ۱ = e$$

۶۹. فرض کنید $z=1/x$، دراین صورت $x\to-\infty$ یا $x\to+\infty$ وقتی $z\to 0$. اکنون

$$\lim_{z\to 0+}(1+z)^{1/z}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{z\to 0-}(1+z)^{1/z}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

بنابراین

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e$$

۷۰.
$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{x/a}\right\}^{1/a}=e^{1/a}$$

۷۱. فرض کنید $y=a^x-1$. دراین صورت $y\to 0$ وقتی $x\to 0$. داریم

$$a^x=1+y$$

یا

$$x\ln a=\ln(1+y)$$

$$x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$$

بنابراین

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)/\ln a}$$

$$=\frac{1}{(1/y)\cdot\ln(1+y)/\ln a}$$

$$=\ln a\cdot\frac{1}{(1/y)\ln(1+y)}$$

$$=\ln a\cdot\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\left[\ln a\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}\right]$$

$$=\ln a\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}$$

$$=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{1/y}}$$

$$=\ln a\frac{1}{\ln e}=\ln a\qquad (\text{زیرا } \ln e=1)$$

۷۲. فرض کنید $x=a(1+y)$. دراین صورت $y\to 0$ وقتی $x\to a$، بنابراین

$$\frac{x^\lambda-a^\lambda}{x-a}=a^\lambda\frac{[(1+y)^\lambda-1]}{ay}=a^{\lambda-1}\frac{(1+y)^\lambda-1}{y}$$

مجدداً قرار می‌دهیم $z=(1+y)^\lambda-1$. در این صورت $z\to 0$ وقتی $y\to 0$. بنابراین

$$(1+y)^\lambda=1+z\implies \lambda\ln(1+y)=\ln(1+z)$$

$$\frac{x^\lambda-a^\lambda}{x-a}=a^{\lambda-1}\cdot\frac{z}{y}$$

$$=a^{\lambda-1}\cdot\frac{z}{\ln(1+z)}\cdot\frac{\ln(1+z)}{y}$$

$$=a^{\lambda-1}\cdot\frac{z}{\ln(1+z)}\cdot\frac{\lambda\ln(1+y)}{y}$$

$$=a^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}}\cdot\lambda\ln(1+y)^{1/y}$$

پس

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\lambda-a^\lambda}{x-a}=\lambda a^{\lambda-1}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}}\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}$$

$$=\lambda a^{\lambda-1}\frac{1}{\ln e}\cdot\ln e=\lambda a^{\lambda-1}$$

۷۳. $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[(1+3x)^{1/3x}]^3=[\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x}]^3$$

$$=e^3=f(0)$$

۷۴. (الف) درنقاط $x=1$ و $x=-1$ ناپیوسته است. (ب) پیوسته است. (پ) درنقاط ۱ و ۱ــ ناپیوسته است. (ت) پیوسته است. (ث) در نقطهٔ ۱ــ ناپیوسته است. (ج) درنقاط ۲ و۴ ناپیوسته است. (چ) درنقطهٔ ۳ ناپیوسته است. (ح) پیوسته است.

(خ) در نقطهٔ $x=\circ$ ناپیوسته است. (د) پیوسته است.

برای تابع قسمت (خ) توجه کنید که $|f(1/[n+(1/2)]\pi)-f(\circ)|=1$.

برای تابع قسمت (د) داریم $|f(x)-f(\circ)|\leqslant|x|$.

۷۵. (الف) ε، ε، ε. (ب) برای $x_\circ=-1+(1/n)$، $x=-1+(2/n)$ داریم

$$\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x_\circ}\right|=\frac{n}{2}$$

برای $x=x_\circ+(1/n)$ داریم

$$|x^3-x_\circ^3|\geqslant\frac{3x_\circ^2}{n}$$

برای $x_\circ\geqslant 1$ و $x=x_\circ+(1/n)$ داریم

$$\left|\frac{x^3}{1+|x|}-\frac{x_\circ^3}{1+|x_\circ|}\right|=\frac{(x^3-x_\circ^3)+xx_\circ(x^2-x_\circ^2)}{(1+x)(1+x_\circ)}$$

$$\geqslant\frac{3x_\circ^2+2x_\circ^3}{n(2+x_\circ)(1+x_\circ)}\geqslant\frac{2x_\circ^3}{n(3x_\circ)(2x_\circ)}\geqslant\frac{x_\circ}{3n}$$

۷۶. باید نشان دهیم

$$\forall\varepsilon>\circ,\ \exists\delta>\circ:|x-x_\circ|<\delta\implies|f(x)-f(x_\circ)|<\varepsilon,$$

$$\forall x,\ x_\circ\in D_f$$

فرض کنید $h=x-x_\circ$ در این صورت $x=x_\circ+h$، و

$$|f(x)-f(x_\circ)|=|f(x_\circ+h)-f(x_\circ)|\leqslant ch^2=c|x-x_\circ|^2$$

اگر $|x-x_\circ|<\sqrt{\varepsilon/c}$ باشد، آنگاه $|f(x)-f(x_\circ)|\leqslant c|x-x_\circ|^2<\varepsilon$.

بنابراین کافی است قرار دهیم $\delta=\sqrt{\varepsilon/c}$. چون δ فقط به ε بستگی دارد، لذا پیوستگی تابع یکنواخت است.

فهرست راهنما

نشر علوم پایه

ریاضی
۱

قیمت : ۸۵۰ ریال